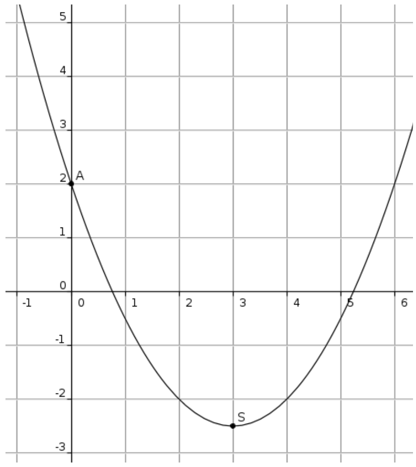
EXERCICE 1 : 1. La forme canonique du polynôme du second degré P est $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x - 3)^2 - 2{,}5$.
Le point A(0 ; 2) est sur la parabole, donc P(0) = 2, soit $a(0 - 3)^2 - 2{,}5 = 2$, soit $9a = 4{,}5$ soit $a = 0{,}5$;
donc $P(x) = 0{,}5(x - 3)^2 - 2{,}5 = 0{,}5(x^2 - 6x + 9) - 2{,}5 = 0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5 - 2{,}5 = 0{,}5x^2 - 3x + 2$.



2. Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $P(x) = 0$ équivaut à $0{,}5x^2 - 3x + 2 = 0$;
on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times0{,}5\times2 = 9 - 4 = 5 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\times0{,}5} = 3 + \sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2\times0{,}5} = 3 - \sqrt{5}$.
Les ordonnées sont nulles.

4. Le tableau de variations de la fonction P sur l'intervalle [– 1 ; 6] :

x	– 1	3	6
P(x)	5,5 ↘	– 2,5	↗ 2

5. L'inéquation $P(x) \leq 10$ équivaut à $0{,}5x^2 - 3x + 2 \leq 10$
équivaut à $0{,}5x^2 - 3x - 8 \leq 0$.
On cherche le signe de $0{,}5x^2 - 3x - 8$: on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times0{,}5\times(-8) = 9 + 16 = 25 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{2\times0{,}5} = 8$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{2\times0{,}5} = -2$.
Le tableau de signes de $0{,}5x^2 - 3x - 8$:

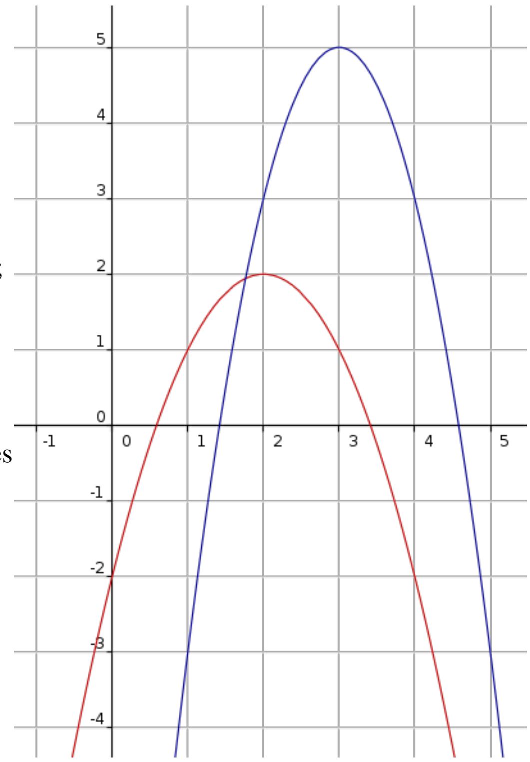
x	$-\infty$		– 2		8		$+\infty$
$0{,}5x^2 - 3x - 8$		+	0	–	0	+	

D'où la solution de l'inéquation $P(x) \leq 10$ est S = [– 2 ; 8].

EXERCICE 2 : On considère les deux paraboles représentatives des polynômes P_1 et P_2 définis par $P_1(x) = -x^2 + 4x - 2$ et $P_2(x) = -2x^2 + 12x - 13$.

1. Les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P_1 :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\times(-1)} = 2$ et $\beta = P_1(\alpha) = -2^2 + 4\times2 - 2 = 2$;
donc $S_1(2 ; 2)$.
Les coordonnées du sommet de la parabole représentative de P_2 :
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times(-2)} = 3$ et $\beta = P_2(\alpha) = -2\times3^2 + 12\times3 - 13 = 5$;
donc $S_2(3 ; 5)$.

2. Tracé des deux paraboles :



3. Les abscisses des éventuels points d'intersection des deux courbes vérifient l'équation $P_1(x) = P_2(x)$ équivaut à
$-x^2 + 4x - 2 = -2x^2 + 12x - 13$ équivaut à $x^2 - 8x + 11 = 0$;
on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times1\times11 = 20 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+\sqrt{20}}{2} = \dfrac{8+2\sqrt{5}}{2} = 4 + \sqrt{5}$ et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-\sqrt{20}}{2} = 4 - \sqrt{5}$.

Les ordonnées : $y_1 = \text{P}_1(4 + \sqrt{5}) = -(4 + \sqrt{5})^2 + 4(4 + \sqrt{5}) - 2 = -(16 + 8\sqrt{5} + 5) + 16 + 4\sqrt{5} - 2 =$
$-16 - 8\sqrt{5} - 5 + 16 + 4\sqrt{5} - 2 = -7 - 4\sqrt{5}$;

$y_2 = \text{P}_1(4 - \sqrt{5}) = -(4 - \sqrt{5})^2 + 4(4 - \sqrt{5}) - 2 = -(16 - 8\sqrt{5} + 5) + 16 - 4\sqrt{5} - 2 =$
$-16 + 8\sqrt{5} - 5 + 16 - 4\sqrt{5} - 2 = -7 + 4\sqrt{5}$;
donc les points d'intersection des deux courbes sont les points de coordonnées
$(4 - \sqrt{5} ; -12 - 4\sqrt{5})$ et $(4 + \sqrt{5} ; -12 + 4\sqrt{5})$

4. Résolution de l'inéquation $\text{P}_1(x) \leq \text{P}_2(x)$: équivaut à $-2x^2 + 12x - 13 \leq 0$; le signe de ce polynôme est :

x	$-\infty$		$4-\sqrt{5}$		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$-2x^2 + 12x - 13$		+	0	−	0	+	

La solution est donc $\text{S} = [4 - \sqrt{5} ; 4 + \sqrt{5}]$.