CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 3 PREMIÈRE STD2A

1. Sur le cercle de centre O ci-dessous, tracé des deux diamètres [AF] et [PP'] perpendiculaires.
2. Tracé du cercle C_1 de diamètre [OP'] et de centre I, de la droite (AI) qui coupe le cercle C_1 en K et L tel que K est sur le segment [AI].
4. Le cercle de centre A et de rayon AK coupe le premier cercle en B et J. Le cercle de centre A et de rayon AL coupe le premier cercle en D et H. On admet que le segment [AB] est un côté du décagone ABCDEFGHIJ régulier inscrit dans le cercle de centre O. Construction du décagone ABCDEFGHIJ.
5. On suppose que le rayon du premier cercle est 1 unité.
a) Le triangle OAI est rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$AI^2 = OA^2 + OI^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, d'où $AI = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$AK = AI - IK = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $AL = AI + IL = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

b) On a $AB = AK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qui est le côté du décagone régulier.

c) Le triangle AHF est rectangle en H car il est inscrit dans le grand cercle et le côté [AF] est un diamètre du cercle. Donc $HF^2 = AF^2 - AH^2 = AF^2 - AL^2 = 2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{10-2\sqrt{5}}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, d'où $HF = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = JB$.

d) Soit T le point d'intersection des droites (OA) et (JB). On a OJ = OB (rayon du cercle circonscrit au décagone) et AJ = AB (côté du décagone régulier). Donc la droite (OA) est la médiatrice de [JB] ; donc T est le milieu de [JB] et le triangle OBT est rectangle en T ; et $BT = \frac{JB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

L'aire du triangle OAB est égale à $\frac{OA \times BT}{2} = \frac{1 \times BT}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

e) La valeur exacte de l'aire du décagone régulier est $10 \times \text{aire(OAB)} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.