CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 4 PREMIÈRE STD2A

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+4x}$.

1. La fonction f est définie lorsque $-x^2 + 4x \geq 0$ équivaut à $x(-x+4) \geq 0$; le polynôme $-x^2 + 4x$ s'annule en $x = 0$ et $x = 4$ et est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty ; 0] \cup [4 ; +\infty[$ et est positif sur $[0 ; 4]$. Donc la fonction est définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

2. La fonction f a les mêmes variations que la fonction $x \rightarrow -x^2 + 4x$; c'est un polynôme du second degré avec $a = -1 < 0$; le sommet de la parabole représentative de ce polynôme a pour coordonnées :

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\times(-1)} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -2^2 + 4\times2 = 4$.

D'où le tableau de variations :

x	0	2	4
$f(x)$	0 ↗	4	↘ 0

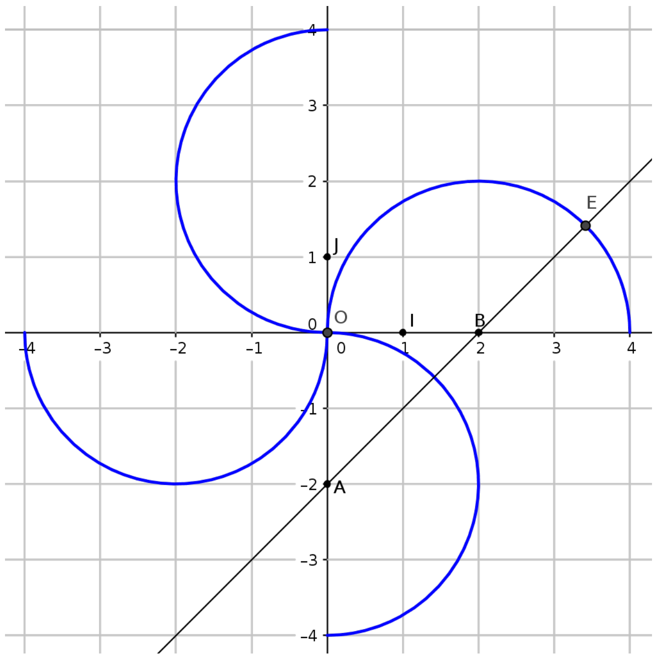
3. La courbe C représentative de la fonction f :

4. Construction de l'image C_1 de cette courbe par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens anti-horaire.

5. Construction de l'image C_2 de cette courbe par la rotation de centre O et d'angle 180° dans le sens anti-horaire.

6. Construction de l'image C_3 de cette courbe par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens horaire.

7. Tracé de la droite passant par les centres de C et de C_3. Cette droite coupe la courbe C en E.



8. Les centres de C et de C_3 ont pour coordonnées A(0 ; – 2) et B(2 ; 0).

L'équation de la droite passant par les centres des cercles est $y = x - 2$.

L'abscisse du point E vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} y=\sqrt{-x^2+4x} \\ y=x+2 \end{cases}.$$

On résout l'équation $\sqrt{-x^2+4x} = x + 2$; on élève au carré : $-x^2 + 4x = (x-2)^2$;

on développe $-x^2 + 4x = x^2 - 4x + 4$; on simplifie $2x^2 - 8x + 4 = 0$;

on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times2\times4 = 32 > 0$, donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+\sqrt{32}}{2\times2} = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-\sqrt{32}}{2\times2} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{4} = 2 - \sqrt{2}$.

Les ordonnées sont $y_1 = x_1 - 2 = \sqrt{2}$ et $y_2 = x_2 - 2 = -\sqrt{2}$.

Le point E a une abscisse supérieure à 2, donc ses coordonnées sont $E(2 + \sqrt{2} ; \sqrt{2})$.