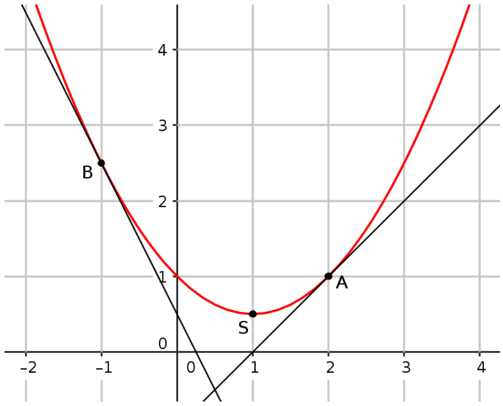
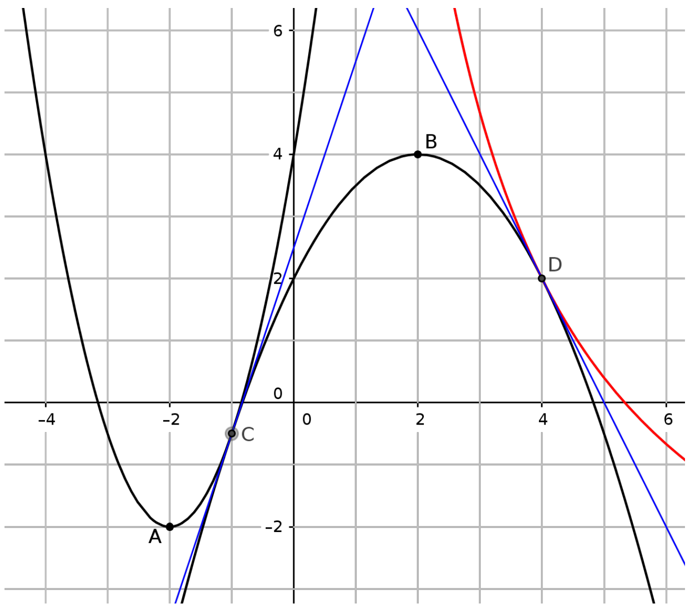
CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 6 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : On considère les points A(2 ; 1) et B(– 1 ; 2,5). Le polynôme P du second degré dont la parabole représentative passe par les points A et B avec des tangentes en ces points de coefficient directeur respectivement de 1 et – 2 est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Le nombre dérivé en $x = \alpha$, est $P'(\alpha) = 2a\alpha + b$.
Ainsi P(2) = 1, soit $4a + 2b + c = 1$; P(– 1) = 2,5, soit $a – b + c = 2,5$;
le coefficient directeur de la tangente en A est 1, donc P'(2) = 1, soit $4a + b = 1$;
le coefficient directeur de la tangente en B est – 2, donc P'(– 1) = – 2, soit $– 2a + b = – 2$. On obtient donc les quatre équations : $4a + 2b + c = 1$; $a – b + c = 2,5$; $4a + b = 1$; $– 2a + b = – 2$.
On soustrait les deux dernières équations, on trouve $6a = 3$, donc $a = 0,5$; on remplace cette valeur dans la quatrième équation : $– 1 + b = – 2$, soit $b = – 1$.
On remplace ces deux valeurs dans la première équation :
$2 – 2 + c = 1$, d'où $c = 1$.
Donc $P(x) = 0,5x^2 – x + 1$.
1. La représentation graphique de la situation :



2. Le point de la parabole ayant une tangente horizontale est le sommet d'abscisse $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2\times0,5} = 1$ et
d'ordonnée $\beta = P(\alpha) = 0,5\times1^2 – 1 + 1 = 0,5$. Soit S(1 ; 0,5).

EXERCICE 2 : Les deux courbes ci-contre sont des paraboles représentatives des fonctions f et g définies par
$f(x) = 1,5x^2 + 6x + 4$ et $g(x) = – 0,5x^2 + 2x + 2$.
1. Les deux courbes se coupent en un seul point si l'équation $f(x) = g(x)$ a une seule solution,
soit $1,5x^2 + 6x + 4 = – 0,5x^2 + 2x + 2$ équivaut à $2x^2 + 4x + 2 = 0$ équivaut à $2(x^2 + 2x + 1) = 0$ équivaut à $x^2 + 2x + 1 = 0$ équivaut à $(x + 1)^2 = 0$ équivaut à $x + 1 = 0$ équivaut à $x = – 1$.
Et l'ordonnée est $f(– 1) = 1,5\times(– 1)^2 + 6\times(– 1) + 4 = 1,5 – 6 + 4 = – 0,5$. Il y a bien un point d'intersection des deux courbes de coordonnées C(– 1 ; – 0,5).
2. Les deux courbes ont la même tangente en ce point d'intersection si $f'(– 1) = g'(– 1)$.
Or $f'(a) = 3a + 6$, donc $f'(– 1) = –3 + 6 = 3$;
$g'(a) = – a + 2$, donc $g'(– 1) = 1 + 2 = 3$. Donc les deux courbes ont bien la même tangente de coefficient directeur 3 au point d'intersection C.
3. Tracé de la courbe représentative de la fonction h définie sur]0 ; 6] par $h(x) = \dfrac{32}{x} – 6$:



Cette courbe coupe la parabole représentative de la fonction g.
a) L'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes vérifie l'équation $g(x) = h(x)$,
soit $– 0,5x^2 + 2x + 2 = \dfrac{32}{x} – 6$ équivaut à
$– 0,5x^2 + 2x + 2 = \dfrac{32-6x}{x}$ équivaut à
$– 0,5x^3 + 2x^2 + 2x = 32 – 6x$ équivaut à
$– 0,5x^3 + 2x^2 + 8x – 32 = 0$.
Par lecture graphique, la solution est $x = 4$.
On vérifie : $g(4) = – 0,5\times4^2 + 2\times4 + 2 = 2$
et $h(4) = \dfrac{32}{4} – 6 = 8 – 6 = 2$. Le point d'intersection est D(4 ; 2).

b) Ces deux courbes admettent la même tangente en ce point d'intersection si $g'(4) = h'(4)$:
$g'(4) = – 4 + 2 = – 2$; et $h'(a) = \dfrac{-32}{a^2}$, d'où $h'(4) = \dfrac{-32}{4^2} = \dfrac{-32}{16} = – 2$; donc ces deux courbes ont la même tangente au point D de coefficient directeur – 2.