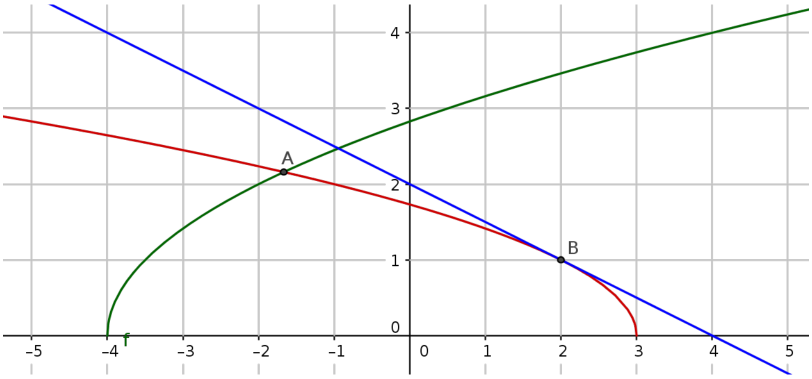
<u>CORRIGÉ</u> <u>DEVOIR SURVEILLÉ N° 4</u> <u>PREMIÈRE STD2A</u>

<u>EXERCICE 1 :</u> 1. La fonction racine carrée est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\ ;+\infty\ [$;
2. La courbe représentative de la fonction racine carrée est une demi parabole.
3. Si $0 \leqslant a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$;
Si $2 \leqslant a < b$ alors $-a > -b$, d'où $2 - a > 2 - b$, d'où $\sqrt{2-a} > \sqrt{2-b}$;
4. Si $0 \leqslant x < 1$ alors $\sqrt{x} > x$; si $x > 1$ alors $\sqrt{x} < x$.

<u>EXERCICE 2 :</u> On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{2x+8}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ et $h(x) = \frac{-1}{2}x + 2$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f : il faut que $2x + 8 \geqslant 0$, soit $2x \geqslant -8$, soit $x \geqslant -4$;
donc $D_f = [-4\ ;+\infty\ [$.
L'ensemble de définition de la fonction g : il faut que $3 - x \geqslant 0$, soit $-x \geqslant -3$, soit $x \leq 3$; donc $D_g =]-\infty\ ;3]$.
La fonction h est une fonction affine donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Tracé des courbes C_f, C_g, C_h représentatives des fonctions f, g et h :



3. Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$:
$\sqrt{2x+8} = \sqrt{3-x}$;
on élève au carré : $2x + 8 = 3 - x$
équivaut à $2x + x = 3 - 8$
équivaut à $3x = -5$ équivaut à $x = \frac{-5}{3}$.

On a $f(\frac{-5}{3}) = \sqrt{2\times\frac{-5}{3}+8} = \sqrt{\frac{-10}{3}+\frac{24}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$ et $g(\frac{-5}{3}) = \sqrt{3-\frac{-5}{3}} = \sqrt{\frac{9}{3}+\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Donc l'équation a une solution : $S = \{\frac{-5}{3}\}$.

Résolution de l'équation $g(x) = h(x)$: $\sqrt{3-x} = \frac{-1}{2}x + 2$;

on élève au carré : $3 - x = \left(\frac{-1}{2}x+2\right)^2$ équivaut à $3 - x = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ équivaut à $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$;

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times\frac{1}{4}\times 1 = 1 - 1 = 0$, donc l'équation a une solution :

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2\times\frac{1}{4}} = 2$. On a $g(2) = \sqrt{3-2} = 1$ et $h(2) = \frac{-1}{2}\,2 + 2 = 1$. Donc l'équation a une solution : $S = \{2\}$.

4. Les coordonnées du point A intersection de C_f et C_g sont $A(\frac{-5}{3}\ ;\sqrt{\frac{14}{3}})$

et les coordonnées du point B intersection de C_g et C_h sont $B(2\ ;1)$.

<u>EXERCICE 3 :</u> La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+6x+7}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f : il faut que $-x^2 + 6x + 7 \geqslant 0$; on calcule le discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times(-1)\times 7 = 64 = 8^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+8}{2\times(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-8}{2\times(-1)} = \frac{-14}{-2} = 7$.
La fonction u définie par $u(x) = -x^2 + 6x + 7$ est un polynôme du second degré, il est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty\ ;-1] \cup [7\ ;+\infty\ [$ et positif sur $[-1\ ;7]$. Donc $D_f = [-1\ ;7]$.

2. Le sommet de la parabole représentative de u a pour coordonnées : $\alpha = \frac{-b}{2a} = 3$ et $\beta = u(3) = -3^2 + 63 + 7 = 16$.

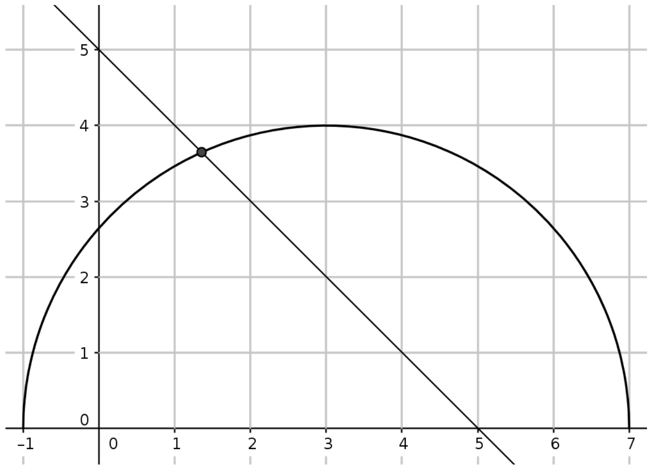
Le polynôme u est croissant sur $]-\infty\ ;3]$ et décroissant sur $[3\ ;+\infty\ [$;

d'où le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition :

x	-1		3		7
$f(x)$			4		
		↗		↘	
	0				0

3. Tracé de la droite d'équation $y = -x + 5$.

4. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe représentative de f, on résout l'équation $f(x) = g(x)$:
$\sqrt{-x^2+6x+7} = -x + 5$; on élève au carré : $-x^2 + 6x + 7 = (-x + 5)^2$;
on développe : $-x^2 + 6x + 7 = x^2 - 10x + 25$;
on simplifie : $-2x^2 + 16x - 18 = 0$ équivaut à $x^2 - 8x + 9 = 0$;
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times1\times9 = 28 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{28}}{2} = \frac{8+2\sqrt{7}}{2} = 4 + \sqrt{7}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{28}}{2} = \frac{8-2\sqrt{7}}{2} = 4 - \sqrt{7}$.
On a $y_1 = -(4 + \sqrt{7}) + 5 = 1 - \sqrt{7} < 0$, donc cette solution est impossible car $f(4 + \sqrt{7}) > 0$.
Il y a donc un point d'intersection d'abscisses $x_2 = 4 - \sqrt{7}$ et d'ordonnée $y_2 = -(4 - \sqrt{7}) + 5 = 1 + \sqrt{7}$.



BONUS : Montrons que la courbe représentative de la fonction f est un demi-cercle de centre $\Omega(3 ; 0)$ et de rayon 4 : un point $M(x ; y)$ est sur le cercle si $\Omega M = 4$,
soit $\Omega M^2 = 16$,
soit $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 16$,
soit $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 16$,
soit $y^2 = 16 - x^2 + 6x - 9$,
soit $y^2 = -x^2 + 6x + 7$.

D'où $y = \sqrt{-x^2+6x+7}$ ou $y = -\sqrt{-x^2+6x+7}$.
La première relation équivaut à $y = f(x)$, donc la courbe représentative de la fonction f est bien le demi-cercle de centre $\Omega(3 ; 0)$ et de rayon 4 situé au-dessus de l'axe des abscisses.