CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 6 PREMIÈRE STD2A

EXERCICE 1 : Question de cours : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. On considère deux réels a et h.
Soit A le point de la courbe (C) d'abscisse a et M le point de la courbe (C) d'abscisse $a + h$.

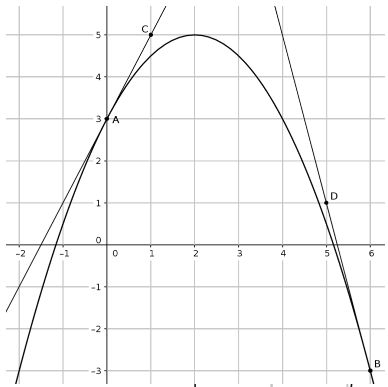
1. Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^3-a^3}{h} = \dfrac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h} = \dfrac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h} = \dfrac{h(3a^2+3ah+h^2)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$.

3. Le nombre dérivé de la fonction f en $x = a$ est $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2) = 3a^2$.

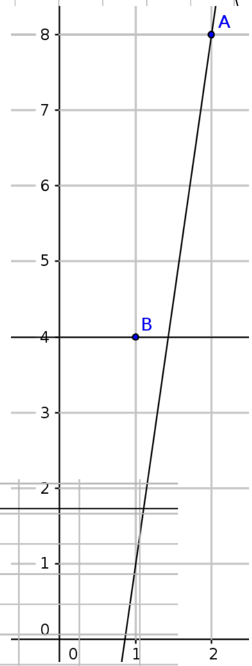
4. La courbe admet deux tangentes de coefficient directeur égal à 12 si $f'(a) = 12$ soit $3a^2 = 12$ soit $a^2 = 4$ soit $a = 2$ ou $a = -2$. Vérification : $f'(2) = 3\times 2^2 = 12$ et $f'(-2) = 3\times(-2)^2 = 12$.
Les ordonnées de ces points : $f(2) = 2^3 = 8$ et $f(-2) = (-2)^3 = -8$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels, et sa courbe représentative donnée ci-contre.
Les droites tracées sont des tangentes à la courbe aux points A(0 ; 3) et B(6 ; – 3).
La tangente en A passe par C(1 ; 5) ; la tangente en B passe par D(5 ; 1).



1. Par lecture graphique, $f(0) = 3$, $f(6) = -3$, $f'(0) = 2$ (coefficient directeur de la tangente en A), $f'(6) = -4$ (coefficient directeur de la tangente en B).
2. On a donc $f(0) = c$, donc $c = 3$;
Le nombre dérivé de la fonction en α est $f'(\alpha) = 2a\alpha + b$; $f'(0) = b$, donc $b = 2$;
$f(6) = 36a + 6b + c = 36a + 12 + 3 = -3$, donc $36a = -18$,
donc $a = \dfrac{-18}{36} = -0{,}5$. Ainsi, $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$.
3. On peut trouver un nombre réel x tel que $f'(x) = 1$, puisque $f'(x) = -x + 2 = 1$, soit $-x = -1$, soit $x = 1$.

EXERCICE 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x} - 2$ et (C) sa courbe représentative.



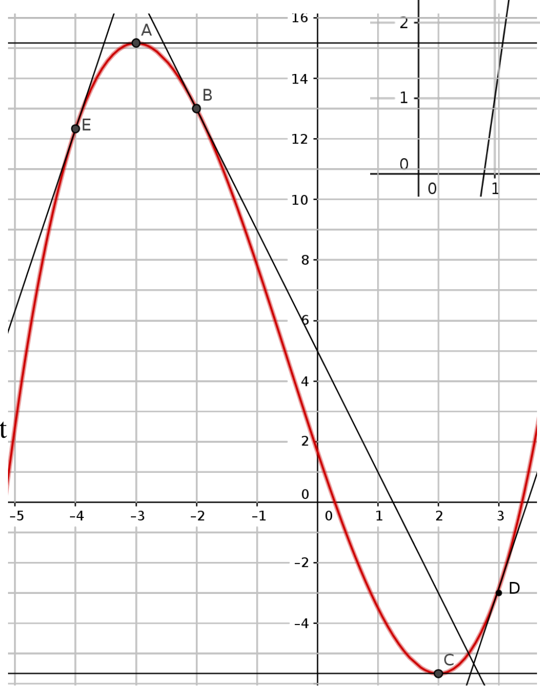
1. 1. Les ordonnées des points A, B et D de (C) d'abscisses respectives 2 et 1 :
$y_A = f(x_A) = f(2) = 2\times 2^2 + \dfrac{4}{2} - 2 = 8 + 2 - 2 = 8$.
$y_B = f(x_B) = f(1) = 2\times 1^2 + \dfrac{4}{1} - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$.

2. Pour un réel a, le nombre dérivé en $x = a$ est $f'(a) = 4a - \dfrac{4}{a^2}$.

3. On en déduit $f'(2) = 4\times 2 - \dfrac{4}{2^2} = 8 - 1 = 7$, et
$f'(1) = 4\times 1 - \dfrac{4}{1^2} = 4 - 4 = 0$.

4. Tracé des points A, B dans un repère orthonormé du plan et des tangentes à la courbe (C) en ces deux points.

EXERCICE 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est donnée ci-contre.



1. Les points A, B, C et D de la courbe d'abscisses respectives – 3, – 2, 2 et 3 :
2. Tracé des tangentes à la courbe aux points A, B, C et D sachant que $f'(-3) = 0$, $f'(-2) = -4$, $f'(2) = 0$, $f'(3) = 6$.

3. Le point E est le point de la courbe d'abscisse – 4.
La tangente en E est parallèle à la tangente en D,
donc $f'(-4) = 6$.