EXERCICE 1 : 1. La fonction racine carrée est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty\,[$; réponse C.

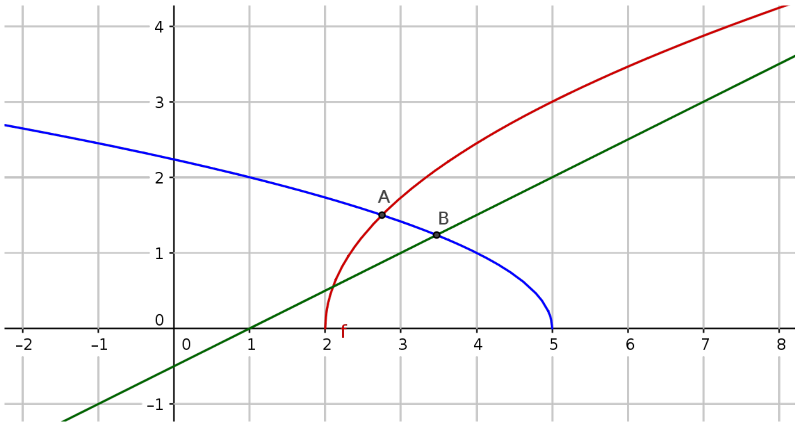
2. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\sqrt{x} \geqslant x$; réponse C.

3. 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{5x+8} - 3$; alors $D_f = [-1{,}6\,;+\infty\,[$; réponse C.

EXERCICE 2 : On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \sqrt{3x-6}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$ et $h(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

1. L'ensemble de définition de la fonction f : il faut que $3x - 6 \geqslant 0$, soit $3x \geqslant 6$, soit $x \geqslant 2$;
donc $D_f = [2\,;+\infty\,[$.
L'ensemble de définition de la fonction g : il faut que $5 - x \geqslant 0$, soit $-x \geqslant -5$, soit $x \leq 5$; donc $D_g =]-\infty\,;5]$.
La fonction h est une fonction affine donc elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Tracé des courbes C_f, C_g, C_h représentatives des fonctions f, g et h :



3. Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$:
$\sqrt{3x-6} = \sqrt{5-x}$
on élève au carré : $3x - 6 = 5 - x$
équivaut à $3x + x = 5 + 6$
équivaut à $4x = 11$ équivaut à $x = \dfrac{11}{4}$.

On a $f\left(\dfrac{11}{4}\right) = \sqrt{3\times\dfrac{11}{4}-6} = \sqrt{\dfrac{33}{4}-\dfrac{24}{4}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = 1{,}5$ et

$g\left(\dfrac{11}{4}\right) = \sqrt{5-\dfrac{11}{4}} = \sqrt{\dfrac{20}{4}-\dfrac{11}{4}} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = 1{,}5$. Donc l'équation a une solution : $S = \left\{\dfrac{11}{4}\right\}$.

Résolution de l'équation $g(x) = h(x)$: $\sqrt{5-x} = \dfrac{x-1}{2}$;

on élève au carré : $5 - x = \left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2$ équivaut à $5 - x = \dfrac{x^2-2x+1}{4}$ équivaut à $4(5 - x) = x^2 - 2x + 1$ équivaut à $20 - 4x = x^2 - 2x + 1$ équivaut à $x^2 + 2x - 19 = 0$;

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-19) = 4 + 76 = 80 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{80}}{2} = \dfrac{-2+4\sqrt{5}}{2} = -1 + 2\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{80}}{2} = \dfrac{-2-4\sqrt{5}}{2} = -1 - 2\sqrt{5}$.

On a $g(-1 + 2\sqrt{5}) = \sqrt{5+1-2\sqrt{5}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} \simeq 3{,}56$ et $h(-1 + 2\sqrt{5}) = \dfrac{-1+2\sqrt{5}-1}{2} = -1 + \sqrt{5} \simeq 3{,}56$.

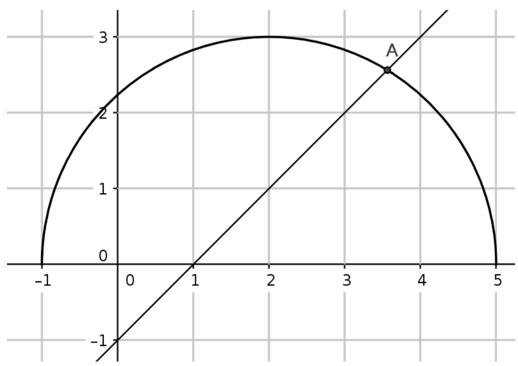
On a $g(-1 - 2\sqrt{5}) = \sqrt{5+1+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} > 0$ et $h(-1 - 2\sqrt{5}) = \dfrac{-1-2\sqrt{5}-1}{2} = -1 - \sqrt{5} < 0$.

Donc l'équation a une solution : $S = \{-1 + 2\sqrt{5}\}$.

4. Les coordonnées du point A intersection de C_f et C_g sont $A\left(\dfrac{11}{4}\,;1{,}5\right)$

et les coordonnées du point B intersection de C_g et C_h sont $B(-1 + 2\sqrt{5}\,;-1 + \sqrt{5})$.

EXERCICE 3 : La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+5}$.



1. L'ensemble de définition de la fonction f :
il faut que $-x^2 + 4x + 5 \geqslant 0$; on calcule le discriminant
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times(-1)\times5 = 36 = 6^2 > 0$,
donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+8}{2\times(-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-6}{2\times(-1)} = \dfrac{-10}{-2} = 5$.

La fonction u définie par $u(x) = -x^2 + 6x + 7$ est un polynôme du second degré, il est du signe de $a = -1 < 0$ sur $]-\infty\,;-1] \cup [5\,;+\infty[$ et positif sur $[-1\,;5]$. Donc $D_f = [-1\,;5]$.

2. Le sommet de la parabole représentative de u a pour coordonnées : $\alpha = \frac{-b}{2a} = 2$ et $\beta = u(2) = -2^2 + 4\times 2 + 5 = 9$.

Le polynôme u est croissant sur $]-\infty\,;2]$ et décroissant sur $[2\,;+\infty[$;
d'où le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition :
$f(2) = \sqrt{u(2)} = 3$.

x	-1		2		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

3. Tracé de la droite d'équation $y = x - 1$.

4. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la courbe représentative de f, on résout l'équation $f(x) = g(x)$:

$\sqrt{-x^2+4x+5} = x - 1$; on élève au carré : $-x^2 + 4x + 5 = (x-1)^2$;
on développe : $-x^2 + 4x + 5 = x^2 - 2x + 1$;
on simplifie : $-2x^2 + 6x + 4 = 0$;
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times(-2)\times 4 = 68 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{68}}{2\times(-2)} = \frac{-6+2\sqrt{17}}{-2} = 3 - \sqrt{17}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{68}}{2\times(-2)} = \frac{-6-2\sqrt{17}}{-2} = 3 + \sqrt{17}$.
On a $y_1 = 3 - \sqrt{17} - 1 = 2 - \sqrt{17} < 0$, donc cette solution est impossible car $f(3 - \sqrt{17}) > 0$.
Il y a donc un point d'intersection d'abscisses $x_2 = 3 + \sqrt{17}$ et d'ordonnée $y_2 = 3 + \sqrt{17} - 1 = 2 + \sqrt{17}$.

BONUS : Montrons que la courbe représentative de la fonction f est un demi-cercle de centre $\Omega(2\,;0)$ et de rayon 3 : un point $M(x\,;y)$ est sur le cercle si $\Omega M = 3$,
soit $\Omega M^2 = 9$,
soit $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 9$,
soit $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9$,
soit $y^2 = 9 - x^2 + 4x - 4$,
soit $y^2 = -x^2 + 4x + 5$.

D'où $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ ou $y = -\sqrt{-x^2+4x+5}$.
La première relation équivaut à $y = f(x)$, donc la courbe représentative de la fonction f est bien le demi-cercle de centre $\Omega(2\,;0)$ et de rayon 3 situé au-dessus de l'axe des abscisses.