

a) Pour tout x et y strictement positifs, on a : $h^2 - g^2 = \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} - xy = xy \left(\frac{4xy - (x+y)^2}{(x+y)^2} \right) = xy \left(\frac{-x^2 - y^2 + 2xy}{(x+y)^2} \right) = xy \frac{-(x-y)^2}{(x+y)^2} \leq 0$, donc $h \leq g$; $m^2 - g^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0$, d'où $m \geq g$; $q^2 - m^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{2x^2 + 2y^2 - (x+y)^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geq 0$, d'où $q \geq m$; b) Ainsi , pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on a .

c) Si $x < y$, on a $x+y < 2y$ et $x(x+y) < 2xy$ et $x < \frac{2xy}{x+y}$ d'où $x < h$;

de plus, $x^2 < y^2$, $x^2 + y^2 < 2y^2$, $\frac{x^2 + y^2}{2} < y^2$, $q^2 < y^2$ d'où $q < y$. Ainsi $x < h \leq g \leq m \leq q < y$.

d) Si $y = 1$, alors $m = \frac{x+1}{2}$ et $h = \frac{2x}{x+1}$; l'inéquation $m < 2h$ peut s'écrire $\frac{x+1}{2} < \frac{4x}{x+1}$, soit $(x+1)^2 < 8x$,

soit

$x^2 - 6x + 1 < 0$ (I). Inéquation du second degré ; $\Delta = 36 - 4 = 32 > 0$, il y a deux solutions à l'équation :

$x_1 = (6 - \sqrt{32})/2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Avec un tableau de signes, la solution de l'inéquation (I) est l'intervalle $] 3 - 2\sqrt{2} ; 3 + 2\sqrt{2} [$. Les solutions x cherchées sont donc dans $]3 - 2\sqrt{2} ; 3 + 2\sqrt{2} [\cap]0 ; +\infty[=]3 - 2\sqrt{2} ; 3 + 2\sqrt{2} [$.