EXERCICE 3
On considère le triangle ABC rectangle et isocèle en B. Soit G le barycentre du système de points pondérés {(A ;1),(B ;2),(C ;3)}. a) Construire le point G.
b) Soit E le barycentre du système de points pondérés {(A ;1),(B ;2)}. Montrer que G est le milieu de [EC].
c) Soit F le symétrique de C par rapport à B. Montrer que E est l'isobarycentre du triangle ACF.
d) Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Déterminer le point H barycentre du système de points pondérés {(E ;3),(C ;3),(D ;6)}.
e) Trouver trois réels *a*, *b*, *c* tels que D soit le barycentre du système de points pondérés {(A ;*a*),(B ;*b*),(C ;c)}.

CORRECTION

a) Le point G est définie par $\overrightarrow{GA} + 2\ \overrightarrow{GB} + 3\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{AG} = 1/3\ \overrightarrow{AB} + 1/2\ \overrightarrow{AC}$.
b) Pour tout M du plan, on a $\overrightarrow{MA} + 2\ \overrightarrow{MB} + 3\ \overrightarrow{MC} = 6\ \overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\ \overrightarrow{MB} = 3\ \overrightarrow{ME}$, d'où en prenant M = C on obtient
$3\ \overrightarrow{CE} = 6\ \overrightarrow{CG}$, d'où $\overrightarrow{CE} = 2\ \overrightarrow{CG}$ et donc G est bien le milieu de [EC].
c) B est alors le milieu de [FC], et dans le triangle AFC, (AB) est une médiane ; or $\overrightarrow{AE} = 2/3\ \overrightarrow{AB}$ et donc E est le centre de gravité de AFC et donc l'isobarycentre des points A, F et C.
d) G est barycentre de {(E ;3), (C ;3)} donc H est le barycentre de {(G ;6), (D ;6)} = {(G ;1), (D ;1)} ; donc H est le milieu de [GD].
e) On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ et donc $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.
Donc D est barycentre de {(A ;1),(B ; -1),(C ;1)}.