EXERCICE 10

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

a) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) représentative de f ?

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes.

c) Déterminer la dérivée de f. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

d) Montrer que (C) coupe la droite (d) d'équation $y = x$ en trois points. Préciser la position de (C) par rapport à (d).

e) On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = |f(x)|$.

Exprimer la quantité $\dfrac{g(0 + h) - g(0)}{h}$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

CORRECTION

a) IR est centrée en 0 et pour tout x de IR, on a $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire et O est le centre de symétrie de (C).

b) $f(x) = \dfrac{2}{x + 1/x}$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; de même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale à la courbe (C).

c) $f'(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$; le signe de la dérivée est le signe de $2 - 2x^2 = 2(1 - x)(1 + x)$; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d) Les abscisses des points d'intersection de (d) et (C) vérifient l'équation $f(x) = x$, soit $\dfrac{2x}{x^2 + 1} = x$ d'où $x^3 - x = 0$; il y a trois solutions : -1, 0 ,1 . La position relative de (d) et (C) est donnée par le signe de $f(x) - x = \dfrac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$; à l'aide d'un tableau de signes, on obtient : (C) est au-dessus de (d) sur les intervalles :] -∞ ; -1] et [0 ; 1] ; (d) est au-dessus de (C) sur les intervalles : [-1 ; 0] et [1 ; +∞ [.

e) $\dfrac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \dfrac{2|h|}{h(h^2 + 1)}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2|h|}{h(h^2 + 1)} = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2|h|}{h(h^2 + 1)} = -2$ donc la fonction g n'est pas dérivable en 0.