EXERCICE 11

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 ; on considère le repère orthonormal de l'espace
$(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$; soit I le milieu de [EH] et R le point d'intersection des droites (EG) et (FI) ;
soit J le milieu de [CG] et S le point d'intersection des droites (CH) et (JD).

a) Faire une figure. Déterminer la distance RS.
b) Soit M un point variable du segment [GH] ; on pose HM = x . Exprimer la distance RM + MS en fonction de x. Pour quelle valeur de x cette distance est-elle minimale ?

CORRECTION

a) Dans le triangle EFH, (FI) et (EG) sont des médianes, donc R est le centre de gravité de EFH.
Donc $\overrightarrow{FR} = 2/3\ \overrightarrow{FI}$; ainsi $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + 2/3\ \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + 2/3(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}) =$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + 2/3(\overrightarrow{BA} + 1/2\ \overrightarrow{AD}) = 1/3\ \overrightarrow{AB} + 1/3\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$; d'où les coordonnées de R(1/3 ; 1/3 ; 1).
Dans le triangle GCD, les droites (CS) et (JD) sont des médianes donc S est le centre de gravité de GCD. Donc $\overrightarrow{DS} = 2/3\ \overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{AD} + 2/3(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AD} + 2/3\ \overrightarrow{AB} + 1/3\ \overrightarrow{AE}$; d'où les coordonnées de S(2/3 ; 1 ; 1/3). La distance RS = $\sqrt{(x_S - x_R)^2 + (y_S - y_R)^2 + (z_S - z_R)^2} = 1$.
b) Coordonnées de M : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + x\ \overrightarrow{HG} = x\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et M(x ; 1 ; 1) .
Distance RM + MS = $\sqrt{(x - 1/3)^2 + 4/9} + \sqrt{(x - 2/3)^2 + 4/9}$;
la distance minimale est atteinte pour $x = 1/2$ et vaut $\sqrt{17}/3$. Pour s'en convaincre, utiliser un patron du cube : avec les deux faces EFGH et CDHG, RM + MS minimum si R, M et S sont alignés ; il reste à démontrer que dans ce cas, M est le milieu de [HG].