EXERCICE 15

On considère le rectangle ABCD tel que AB = 1 et AD = 2 ; I est le milieu du segment [AB]. M est un point quelconque du segment [AD], et on pose AM = x et $f(x) =$ MI² + MC² .

1. Montrer que $f(x) = 2(x - 1)^2 + \frac{13}{4}$. En déduire le tableau de variations de f .
2. Calculer IC². Déterminer x pour que le triangle IMC soit rectangle en M.
3. Expliquer alors la construction du (ou des) point(s) M et faire une figure.
4. La médiatrice de [IC] coupe (AD) en K. Déterminer la longueur AK.
5. Déterminer x pour que MI > MC.
6. Déterminer les nombres dérivés de la fonction f pour $x = 1$ et $x = 0$.

CORRECTION

1. Les triangles IAM et MCD sont rectangles respectivement en A et D, donc $MI^2 = AM^2 + AI^2 = x^2 + \frac{1}{4}$ et $MC^2 = MD^2 + CD^2 = (2 - x)^2 + 1$; d'où $f(x) = MI^2 + MC^2 = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$.

Or $2(x - 1)^2 + \frac{13}{4} = 2x^2 - 4x + 2 + \frac{13}{4} = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$. La fonction f est un polynôme du second degré définie sur [0 ; 2] puisque M est sur [AD] ; sa représentation graphique est une parabole de sommet $S(1 ; \frac{13}{4})$, d'où le tableau de variations :

x	0 2	1
$f(x)$	$\frac{21}{4}$ $\frac{21}{4}$	$\frac{13}{4}$

2. Dans la triangle IBC rectangle en B, $IC^2 = IB^2 + BC^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$; le triangle IMC est rectangle en M si $IC^2 = IM^2 + MC^2$, soit $f(x) = \frac{17}{4}$; on obtient $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

$\Delta = 8 > 0$, il y a donc deux solutions : $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Pour construire les points M_1 et M_2 solutions, il suffit de construire le cercle de centre le milieu de [IC] ; ce cercle coupe [AD] en M_1 et M_2 .

4. K étant sur la médiatrice, on a KI = KC, soit KI² = KC² ; on cherche donc le point M vérifiant MI² = MC², soit $x^2 + \frac{1}{4} = (2 - x)^2 + 1$, et on trouve $x = \frac{19}{16}$.

5. MI > MC si MI² > MC², soit $x^2 + \frac{1}{4} > (2 - x)^2 + 1$, soit $x > \frac{19}{16}$.

6. $f'(1) = 0$ et $f'(0) = -4$.