EXERCICE 18

Cet exercice donne une généralisation d'une partie de l'exercice précédent :
Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$, et les points A, B et C distincts appartenant à $\mathcal{H}$, d'abscisses respectives a, b, c .
Déterminer les coordonnées de l'orthocentre K du triangle ABC, en fonction de a, b, c et vérifier qu'il appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

CORRECTION

Les points A, B et C étant distincts et sur l'hyperbole $\mathcal{H}$, les réels a, b, c sont tous non nuls et distincts.
L'orthocentre K du triangle ABC vérifie : les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux; les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux; donc en posant K(x ; y) , on a $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC} = 0$ d'où $(x - a)(c - b) + (y - \frac{1}{a})(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}) = 0$ soit $(x - a)(c - b) + (y - \frac{1}{a})(\frac{b - c}{bc}) = 0$ et comme $b \neq c$ on peut simplifier par $(c - b)$, d'où : $(x - a) - (y - \frac{1}{a})(\frac{1}{bc}) = 0$ soit $x = a + (y - \frac{1}{a})(\frac{1}{bc})$;

on a aussi $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$ d'où $(x - b)(c - a) + (y - \frac{1}{b})(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}) = 0$ soit $(x - b)(c - a) + (y - \frac{1}{b})(a - c)\frac{1}{ac} = 0$ et comme $a \neq c$, on peut simplifier par $(c - a)$ d'où $(x - b) - (y - \frac{1}{b})\frac{1}{ac} = 0$ soit $x = b + (y - \frac{1}{b})\frac{1}{ac}$;

on a donc $a + (y - \frac{1}{a})\frac{1}{bc} = b + (y - \frac{1}{b})\frac{1}{ac}$ soit $y(\frac{1}{bc} - \frac{1}{ac}) = b - a + \frac{1}{abc} - \frac{1}{abc} = b - a$ et ainsi $y = - abc$.

En remplaçant y par $-abc$ dans $x = b + (y - \frac{1}{b})\frac{1}{ac}$ on trouve $x = \frac{-1}{abc}$.

Les coordonnées du point K sont $(\frac{-1}{abc} ; - abc)$.

On vérifie que $\frac{1}{x_K} = y_K$ donc K est bien sur l'hyperbole $\mathcal{H}$.