EXERCICE 19

On considère la fonction h définie sur IR \ {1} par $h(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ et $\mathcal{H}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les équations des asymptotes à $\mathcal{H}$.
b) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
c) Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{H}$ au point A d'abscisse 2.
d) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx - 1$ où a et b sont des réels. On appelle $\mathcal{P}$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les réels a et b pour que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ aient la même tangente en A.
e) Déterminer alors les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
f) Dresser le tableau de variations de f.
g) Représenter (T), $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ dans le même repère. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq h(x)$.

CORRECTION

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$; donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{H}$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{x-1} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$; la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{H}$.

b) $h'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ est strictement négatif donc la fonction h est décroissante sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	
$h(x)$	1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

c) Equation de la tangente en A(2 ; h (2)) : $y = h'(2)(x-2) + h(2) = -2x + 7$.

d) Les deux courbes passent par A et ont la même tangente en ce point, donc le même coefficient directeur ; il faut donc que $f'(2) = h'(2)$ et $f(2) = h(2)$ soit $f'(2) = -2$ et $f(2) = 3$; d'où $4a + b = -2$ et $4a + 2b - 1 = 3$; on résout ce système de deux équations à deux inconnues et on trouve : $a = -2$ et $b = 6$; donc $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

f) $f'(x) = -4x + 6$;

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$7/2$	↘	$-\infty$

g) La résolution graphique de l'inéquation consiste à trouver les intervalles de x sur lesquels la courbe $\mathcal{P}$ est au-dessous de $\mathcal{H}$; les deux courbes se coupent aux points A et B(0 ; -1).
La solution est donc $]-\infty ; 0] \cup]1 ; 2]$.