EXERCICE 20

On considère la fonction f définie sur IR\{1} par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

a) Vérifier que $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x - 1}$.

b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe C_f représentative de la fonction f .

c) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe C_f.

d) Déterminer la dérivée de f et étudier les variations de f. Dresser le tableau de variations de f .

e) Déterminer la position relative de la courbe C_f et de la droite (d).

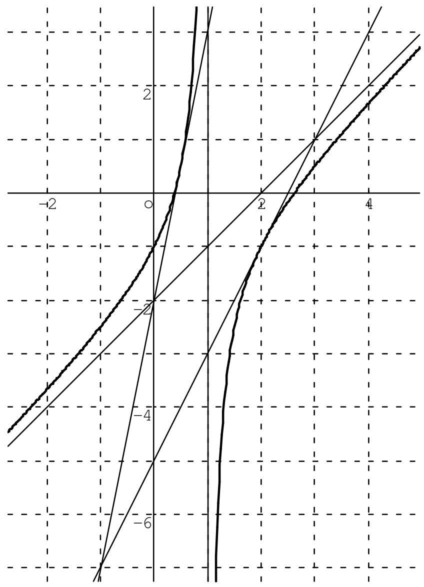
f) Préciser les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

g) Y a-t-il une ou des tangentes à la courbe C_f parallèle à la droite (d) ? Si oui, préciser en quels points .

h) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des tangentes à C_f aux points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$ et 2 .

i) Représenter, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_f, les asymptotes et les tangentes des questions précédentes .

CORRECTION



a) $x - 2 - \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{(x - 2)(x - 1) - 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} = f(x).$

b) Limites de f aux bornes de son ensemble de définition : on utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe C_f.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x - 1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 2)]$ $= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x - 1} = 0$; donc la droite (d) est asymptote oblique à la courbe C_f.

d) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ est strictement positif donc la fonction f est croissante sur] $-\infty$; 1 [et sur] 1 ; $+\infty$ [.

e) $f(x) - (x - 2) = \dfrac{-1}{x - 1}$; cette expression est positive si $x < 1$ et négative si $x > 1$; donc, si $x < 1$ la courbe C_f est au-dessus de la droite (d) et si $x > 1$ la courbe C_f est au-dessous de la droite (d).

f) Les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$;

on trouve deux solutions : $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

g) Une tangente à la courbe C_f parallèle à la droite (d) a un coefficient directeur = 1. On cherche donc à résoudre l'équation $f'(x) = 1$ soit $1 + \dfrac{1}{(x - 1)^2} = 1$ soit $\dfrac{1}{(x - 1)^2} = 0$; cette équation n'a pas de solution, donc il n'y a pas de tangente parallèle à (d).

h) Tangente à C_f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$: $y = f'(½)(x - ½) + f(½) = 5x - 2$; tangente à C_f au point d'abscisse 2 : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 2x - 5$; l'abscisse du point d'intersection de ces deux tangentes vérifie : $5x - 2 = 2x - 5$; soit $x = -1$; et $y = -7$.