EXERCICE 21

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 2]$ par $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) En posant $y = g(x)$ et en calculant y^2, montrer que la courbe C_g est un demi-cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h}$. En déduire si la fonction g est dérivable en 2.

c) Déterminer la dérivée de g et dresser son tableau de variations .

d) On considère la fonction h définie sur IR par $h(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \dfrac{1}{3}$ et C_h sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

e) Etudier les variations de h . Dresser son tableau de variations.

f) Préciser le point où C_h et C_g ont une tangente (T) commune.

g) Représenter, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes C_h et C_g ainsi que la tangente (T).

CORRECTION

On a $y^2 = 2x - x^2$ soit $x^2 - 2x + y^2 = 0$ soit $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ avec $y \geq 0$; donc C_g est un demi-cercle de centre le point de coordonnées (1 ; 0) et de rayon 1.

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{-h^2 - 2h}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} - \sqrt{\dfrac{-h^2 - 2h}{h^2}} = \lim\limits_{h \to 0} - \sqrt{- 1 - \dfrac{h}{2}} = -\infty$. Donc la fonction g n'est pas dérivable en 2 ; elle n'est pas non plus dérivable en 0.

c) $g'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}$. D'où le tableau de variations :

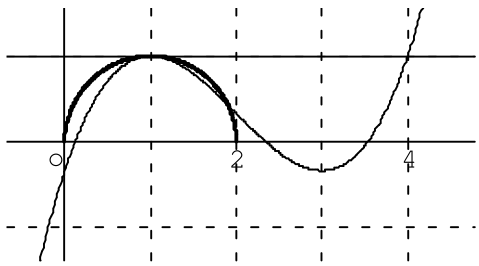
x	0		1		2
$g'(x)$	‖	+	0	−	‖
$g(x)$	0	↗	1	↘	0

d) On utilise la propriété : : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'un polynôme est la limite du terme de plus haut degré :

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

e) $h'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1/3	↗	$+\infty$



f) D'après les deux tableaux de variations, on sait que les deux courbes passent par le point de coordonnées (1 ; 1) et ont une tangente horizontale en ce point.