ENONCE

Sur la branche de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$, on place les points M et N d'abscisses respectives x et $x + 1$. Les points M et N se projettent orthogonalement sur l'axe des abscisses en m et n (d'un repère orthonormal).

a) Calculer l'aire de chacun des triangles O$\mathrm{M}m$ et O$\mathrm{N}n$.

b) Montrer que le trapèze MNnm et le triangle OMN ont la même aire.

c) Soit S la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMN. Déterminer les limites de S en 0^+ et en $+\infty$.

SOLUTION

Coordonnées des points : $M(x\,;\frac{1}{x})$, $N(x+1\,;\frac{1}{x+1})$, $m(x\,;0)$, $n(x+1;0)$.

a) aire(OMm) = Om x Mm / 2 = $x \times \frac{1}{x} / 2 = \frac{1}{2}$; aire(ONn) = On x Nn / 2 = $(x+1) \times \frac{1}{x+1} / 2 = \frac{1}{2}$.

b) aire (MNnm) = (Mm + Nn) mn / 2 = $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) 1 / 2 = \frac{2x+1}{2x(x+1)}$

et aire (OMN)+ aire(ONn) = aire(OMm) + aire (MNnm) d'où aire (OMN) = aire (MNnm) = $\frac{2x+1}{2x(x+1)}$.

c) Pour calculer la limite de S en $+\infty$, on factorise numérateur et dénominateur par x : $S = (2 + \frac{1}{x})/(2(x+1)$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 2(x+1) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} S = 0$;

Pour calculer la limite de S en 0^+, on calcule la limite du numérateur et celle du dénominateur : $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x(x+1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} S = +\infty$.