EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$. Préciser l'ensemble de définition D de f .

a) Etudier la parité de f .
b) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D.
Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe (C) représentative de f .
c) Montrer que $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2} - 1$. En déduire que pour tout x de D, -1 $f(x)$ 1. -1 est-il le minimum de f ? 1 est-il le maximum de f ?
d) Montrer que la fonction dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2}$. Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 .

CORRECTION

L'ensemble de définition de f est IR car le dénominateur ne s'annule pas.
a) D est symétrique par rapport à 0 , et on a $f(-x) = f(x)$ donc f est une fonction paire. La courbe représentative C_f de f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
b) Pour déterminer le limites de f , on factorise f : $f(x) = \dfrac{1 - 1/x^2}{1 + 1/x^2}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
Ainsi la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote horizontale à C_f .
c) On a $\dfrac{2}{1 + x^2} - 1 = \dfrac{2 - (1 + x^2)}{1 + x^2} = f(x)$; pour tout x de D, on a $x^2 > 0$, $x^2 + 1 > 1$, $0 < \dfrac{1}{1 + x^2} < 1$ car la fonction inverse est une fonction décroissante sur $]0 ; +\infty[$, puis $0 < \dfrac{2}{1 + x^2} < 2$, $-1 < f(x) < 1$.
Donc f est bien bornée sur [-1 ; 1].
Le réel -1 n'est pas atteint par f, c'est donc seulement un minorant ; $f(0) = 1$, donc 1 est le maximum de f .
d) $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2}$. Le signe de cette dérivée est celui du numérateur . D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

Equation de la tangente à la courbe C_f en $x = 1$: $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -x + 1$.