EXERCICE 9

On considère la fonction h définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x}$, et (H) sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit M le point de (H) d'abscisse $a > 0$.

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (H) en M.

b) Cette tangente coupe l'axe des abscisses en D et l'axe des ordonnées en C. Déterminer les coordonnées de C et D.

c) Montrer que, pour tout $a > 0$, l'aire du triangle OCD est égale à 4.

d) Déterminer l'équation de la normale (N) à (H) en M.

e) Pour tout $a \neq 1$, F est le point d'intersection de cette normale (N) et de la droite (d) d'équation $y = x$. Pour $a = 1$, F a pour coordonnées (2 ; 2). Montrer que l'abscisse de F est $\frac{a^2+1}{a}$.

f) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$. Que peut-on en déduire ?

CORRECTION

a) L'équation de la tangente (T) à (H) en a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a) = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$ d'où (T) : $y = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}$

b) Le point D a pour ordonnée 0 et pour abscisse la solution de l'équation $0 = \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}$ soit $x = 2a$; D($2a$; 0).

Le point C a pour abscisse 0 et pour ordonnée $y = \frac{0}{a^2} + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$; C$(0\ ; \frac{2}{a})$.

c) Le triangle OCD est rectangle en O et l'aire (OCD) = OCxOD/2 = $\frac{2}{a}\text{x}2a/2 = 2$ pour tout $a > 0$.

d) La normale (N) à (H) en M$(a\ ; \frac{1}{a})$ est perpendiculaire à (T) ; le produit de leur coefficient directeur égale -1, donc le coefficient directeur m de (N) vérifie $m\text{x}\frac{-1}{a^2} = -1$ d'où $m = a^2$; l'équation de (N) est $y = a^2x + \frac{1}{a} - a^3$.

e) (N) coupe (d) au point d'abscisse x vérifiant l'équation $x = a^2x + \frac{1}{a} - a^3$;

d'où $(1 - a^2)x = \frac{1}{a} - a^3 = \frac{1 - a^4}{a} = \frac{(1 - a^2)(1 + a^2)}{a}$ d'où $x = \frac{a^2+1}{a}$. Si $a \neq 1$ alors F$\left(\frac{a^2+1}{a} ; \frac{a^2+1}{a}\right)$.

f) $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1 - a^2}{a} ; \frac{a^2+1}{a}\right)$ et $\overrightarrow{CF}\left(\frac{a^2+1}{a} ; \frac{a^2-1}{a}\right)$ d'où $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$ pour tout $a>0$, donc DCF est rectangle en F.