EXERCICE 7

a) Construire le triangle ABC tel que AB = 4, AC = 6 et BC = 7 .
b) Placer les points I, milieu de [AB], J milieu de [BC] et G centre de gravité du système de points pondérés {(A ;1), (B ;2), (C ;1)}.
c) Construire l'ensemble des points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
d) Construire l'ensemble des points N du plan tel que $(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) \cdot (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB}) = 0$.
e) Construire l'ensemble des points P du plan tel que $\| \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \| = \| \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \|$.
f) Montrer que pour tout point M du plan , on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1/4\ AB^2$. En déduire l'ensemble des points tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4} AB^2$.
g) Construire l'ensemble des points R du plan tel que $\overrightarrow{RA} + 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.

CORRECTION

b) G est le milieu de [IJ], car G est barycentre {(A ;1), (B ;1),(B ;1),(C ;1)} = {(I ;2),(J ;2)}.
c) $(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\ \overrightarrow{LI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Donc $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc L est sur la droite passant par I et perpendiculaire à (AC).
d) $(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}) \cdot (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB}) = 2\ \overrightarrow{NI} \cdot 2\ \overrightarrow{NJ} = 0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{NI}$ et $\overrightarrow{NJ}$ sont orthogonaux, donc N est sur le cercle de diamètre [IJ].
e) $\| \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \| = \| \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \|$ est équivalent à $\| 2\ \overrightarrow{PI} \| = \| 2\ \overrightarrow{PJ} \|$ équivalent à PI = PJ ; donc le point P est sur la médiatrice de [IJ].
f) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 - 1/4\ AB^2$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3}{4} AB^2$ est équivalent $MI^2 - 1/4\ AB^2 = 3/4\ AB^2$ équivalent à $MI^2 = AB^2$ ou MI = AB. Le point M est donc sur le cercle de centre I et de rayon AB.
g) $\overrightarrow{RA} + 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} = 4\ \overrightarrow{RG}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$. Donc le point R est sur la droite parallèle à (AC) passant par G.