EXERCICE 8

On considère le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormé et les points A(2 ; 0), B(-2 ; 2) et C(3; 2).
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?
b) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
c) On considère l'homothétie h de centre G et de rapport -1/2 .
Montrer que les images par h des points A, B et C sont les milieux des côtés de ABC.
Montrer que les images par h des hauteurs sont les médiatrices de ABC.
d) Déterminer les coordonnées de centre du cercle circonscrit à ABC.
e) Déterminer l'équation du cercle circonscrit à ABC .
f) Déterminer une équation du cercle image de par l'homothétie h .

CORRECTION

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = -4 \times 1 + 2 \times 2 = 0$; donc les deux vecteurs sont orthogonaux ; le triangle ABC est rectangle en A.
b) $\overrightarrow{OG} = 1/3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ d'où G(1 ; 4/3) .
c) Si A' est l'image de A par h, on a $\overrightarrow{GA'} = -1/2\ \overrightarrow{GA}$ d' où $\overrightarrow{AG} = 2/3\ \overrightarrow{AA'}$ et donc le point A' est le milieu de [BC]. Démonstration identique pour les deux autres milieux. La hauteur issue de A est parallèle à la médiatrice de [BC] car ces deux droites sont perpendiculaires à (BC). L'image de la hauteur issue de A par h est une droite parallèle passant par l'image A' de A ; il s'agit donc de la médiatrice de [BC]. Démonstration identique pour les deux autres hauteurs.
d) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse, donc Ù (1/2 ; 2).
e) L'équation du cercle circonscrit est de la forme $(x - 1/2)^2 + (y - 2)^2 = R^2$ où R est le rayon du cercle : R = ÙA = 5/2 ;
d'où l'équation $x^2 + y^2 - x - 4y - 2 = 0$.
f) Le centre Ù' de Ã' est l'image de Ù par h : $\overrightarrow{G\text{Ù}'} = -\ 1/2\ \overrightarrow{G\text{Ù}}$ d'où Ù' (5/4 ; 1) . Le rayon de Ã' égale la moitié de celui de Ã, soit 5/4 , d'où l'équation de Ã' : $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + 1 = 0$.