A. Nombre dérivé

1. Notion de tangente :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, la courbe C_f représentative de f dans un repère (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) et un réel a de I. On considère le point A(a ; $f(a)$) de la courbe C_f et le point M($a+h$; $f(a+h)$) pour h réel tel que $a+h$ est dans I. la tangente à la courbe au point A est la droite position limite de la droite sécante AM lorsque M se rapproche de A, c'est-à-dire lorsque h tend vers 0.

Pour h non nul, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. Notion de nombre dérivé :

Définition : Si la limite lorsque h tend vers 0, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, alors on dit que la fonction f est dérivable en a et la limite est appelé le **nombre dérivé** de f en a , et est noté $f'(a)$.

$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Cette dernière limite est obtenu en posant $x = a + h$.

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à C_f au point A ;

Propriété : l'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

➔ Voir une animation sur le nombre dérivé: http://dominique.frin.free.fr/geogebra/nbre_derive.html .

Exemples : a) On cherche le nombre dérivé de la fonction carrée en a réel:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(2a+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (2a+h) = 2a$ qui existe pour tout réel a.

Donc le nombre dérivé de la fonction carrée en un réel x de $\mathbb{R}$ est $2x$.

b) On cherche le nombre dérivé de la fonction inverse en a réel non nul:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{ah(a+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = \dfrac{-1}{a^2}$ qui existe pour tout réel a non nul. Donc le nombre dérivé de la fonction inverse en a réel non nul est $\dfrac{-1}{a^2}$.

Nombre dérivé des fonctions de référence :

$f(x)$	$f'(a)$
$mx + p$	m (une constante)
x^2	$2a$
x^3	$3a^2$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{a^2}$

A. Propriétés des nombres dérivés

Propriété :

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I admettant des nombres dérivés sur I. Alors le nombre dérivé de la somme des fonctions $f + g$ en a de I est égal à $f'(a) + g'(a)$.

Le nombre dérivé de la fonction kf avec k nombre réel en a de I est égal à $kf'(a)$.

Exemples : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 3x - 2 + \dfrac{1}{x}$. Le nombre dérivé de f en $a = 2$ est égal à $f'(2) = 2\times2 + 3 + \dfrac{-1}{2^2} = 7 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{27}{4}$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^2 + 3\sqrt{x}$.

Le nombre dérivé de g en $a = 1$ est égal à $g'(1) = 4\times2\times1 + 3\times \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = 8 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{19}{2}$.