La fonction racine carrée

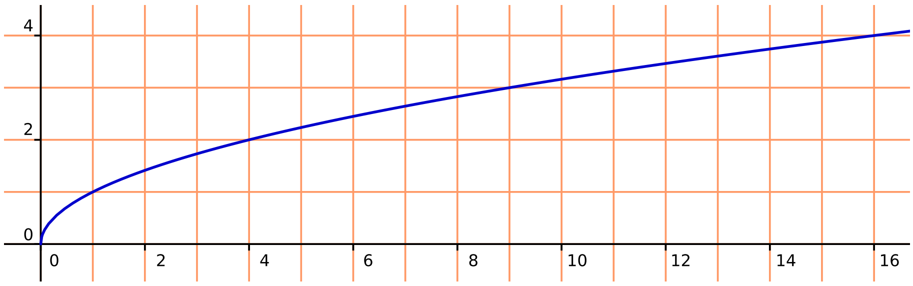
a) Définition : C'est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Elle associe à un nombre réel positif sa racine carrée.

b) Variations : Pour déterminer les variations de la fonction racine carrée, on considère deux nombres réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$; alors $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; le signe de $a - b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a - b < 0$, et le signe de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est strictement positif .
Ainsi le quotient $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ est strictement négatif, donc $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$; la fonction racine carrée conserve l'ordre des nombres sur $[0 ; +\infty[$, donc c'est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

c) Tableau de variations :
On obtient alors le tableau de variations :
Le minimum de la fonction racine carrée est 0 atteint pour $x = 0$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

d) Représentation graphique :
La courbe représentative de la fonction racine carrée est une demie parabole.



e) Comparaison de nombres et inéquations :
Propriété : cette propriété se déduit du tableau de variations de la fonction racine carrée :
si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.
Les racines carrés de deux nombres sont rangés dans le même ordre que ces deux nombres.

f) Comparaison des réels x, x^2 , $\dfrac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$ pour $x > 0$:

Propriété : si $0 < x \leqslant 1$, alors $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$;

si $x > 1$, alors $\dfrac{1}{x} \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

La démonstration sera faite en exercice.