L'étude globale d'une fonction

Le plan d'étude

- Préciser ou vérifier l'ensemble de définition D de la fonction.
- Étudier la parité de la fonction et en déduire les propriétés graphiques. Ceci permet de faire la suite de l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$.
- Rechercher un axe de symétrie ou un centre de symétrie de la courbe qui permet de faire l'étude de la fonction sur un intervalle plus petit que D. *Voir le cours sur la parité et les symétries:* http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_parite.pdf .
- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition D. *Voir le cours sur les limites:* http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_limites.pdf .
- Calculer la dérivée de la fonction en précisant qu'elle est dérivable et sur quel ensemble elle l'est. Dans la plupart des cas, il s'agit de D. *Voir le cours sur la dérivation :* http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_derivation.pdf .
- Étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
- Dresser le tableau de variations de la fonction en rassemblant tous les éléments déterminés précédemment.
- Dessiner une représentation graphique de la fonction en y ajoutant les tangentes horizontales, les éventuelles asymptotes à la courbe.

Un exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Nous allons faire l'étude globale de cette fonction.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f peut s'écrire $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

2. Calculer $f(-2 + x) + f(-2 - x)$. Que peut-on en déduire au sujet de la courbe représentative (C) de f ? On décide de réduire l'étude de la fonction f à l'intervalle $]-2; +\infty[$.

3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de $]-2; +\infty[$. Quelle conséquence graphique pour la courbe (C) peut-on en tirer ?

4. Déterminer la dérivée de la fonction f .

5. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

6. Préciser les coordonnées des points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.

7. a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
b) Étudier la position relative de (d) et de (C) sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

8. Le réel 2 possède-t-il un ou plusieurs antécédents ? Si oui, le(s) déterminer par le calcul.

9. Tracer la courbe (C) après avoir tracé ses asymptotes et toutes tangentes vues précédemment.

Corrigé : 1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ puisque le dénominateur doit être non nul. Sur cet ensemble, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2} = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$; et par identification des numérateurs, on obtient $a = 1$; $2a + b = 3$; $2b + c = 3$, soit $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Donc $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+2}$.

2. $f(-2 + x) + f(-2 - x) = -2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + (-2 - x) + 1 + \dfrac{1}{-x} = -2 = 2 \times (-1)$. Ce qui signifie que le point de coordonnées $(-2; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

3. Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$, donc par la somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en – ∞ : $\lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, donc par la somme des limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite en – 2 par valeurs supérieures : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x+1 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

Limite en – 2 par valeurs inférieures : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} x+1 = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

4. La fonction f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition, et

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2)-(x^2+3x+3)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+7x+6-x^2-3x-3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}.$$

5. Les variations de la fonction f sont donnés par le signe de la dérivée, donc par le signe du numérateur $x^2 + 4x + 3$, puisque le dénominateur est un carré. Signe de $x^2 + 4x + 3$:

$\Delta = 4^2 - 4\times 3 = 4 = 2^2$; l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$ a deux solutions :

$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3$. Le signe de $x^2 + 4x + 3$ est du signe de $1 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines -3 et –1, et négatif pour les valeurs entre -3 et –1.

D'où le tableau de variations:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

6. Les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses lorsque leur coefficient directeur est nul, soit lorsque la fonction dérivée de f est nulle, soit aux points d'abscisses -3 et 1, qui correspondent à des extremums locaux de f.

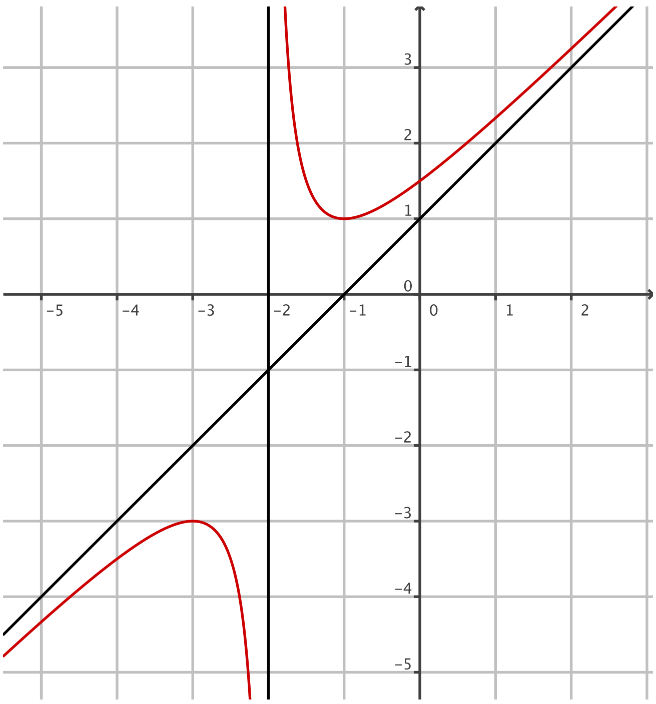
Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C), il suffit de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-(x+1))$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)-(x+1))$ est nulle.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$.

Donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C).

La position relative de (d) et de (C) est donnée par le signe de $f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x+2}$. Ce quotient est strictement positif lorsque $x > -2$, et strictement négatif lorsque $x < -2$.

Donc la droite (d) est en-dessous de (C) sur $]-2; +\infty[$ et au-dessus sur $]-\infty; -2[$.



8. Le réel 2 possède des antécédents si l'équation $f(x) = 2$ a des solutions, soit $\frac{x^2+3x+3}{x+2} = 2$,

soit $x^2 + 3x + 3 = 2x + 4$, soit $x^2 + x - 1 = 0$.

Le discriminant $= 1 - 4\times(-1) = 5 > 0$; l'équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.