A. Fonction polynôme

Définition : On appelle fonction polynôme, ou polynôme, toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, où les a_i sont des réels, appelés coefficients du polynôme f.

Notation : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ (et qui se lit: « somme de $k = 0$ à $k = n$ de $a_k x^k$ »).

- Le plus grand entier n tel que a_n est non nul est le **degré** du polynôme noté deg(f).
- Si, pour tout x, $f(x) = 0$, alors tous les a_i sont nuls (un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls).
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exemples de polynômes : $x^3 + 1$ est un polynôme de degré 3 ; $7x^4 - 8x^3 + x - 9$ est un polynôme de degré 4 ; $\frac{5}{2}$ est un polynôme de degré 0 ou constant ; $-\frac{1}{2}x + 3$ est un polynôme de degré 1 ou fonction affine.

B. Racines et factorisation

Soit f un polynôme et α un réel.

a) α est une racine de f signifie que $f(\alpha) = 0$; ce qui est équivalent à α est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) α est une racine de f équivaut à $f(x)$ se factorise par $(x - \alpha)$ équivaut à : il existe un polynôme g de degré deg(f) – 1 tel que $f(x) = (x - \alpha)\, g(x)$.

c) Le nombre de racines de f est inférieur ou égal à deg(f).

d) *Exemples* : $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$; 1 est une racine de f.
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 1)$; – 1 est une racine de f.
$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$. 1 et 2 sont des racines de f.

C. Polynôme de degré 2

On l'appelle aussi le trinôme du second degré, et on le note $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On peut le factoriser :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé le discriminant du polynôme. On a alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ appelée *forme canonique du trinôme*.

Le tableau de variations d'un polynôme du seconde degré :

Si $a > 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	m	↗ $+\infty$

Si $a < 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	M	↘ $-\infty$

<u>Représentation graphique :</u>

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une parabole.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées ($\frac{-b}{2a}$; $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$).

La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si le nombre a est strictement positif, alors la parabole est tournée vers le haut, et la fonction f admet un minimum m atteint lorsque $x = \dfrac{-b}{2a}$. On a bien sûr $m = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$.
Si le nombre a est strictement négatif, alors la parabole est tournée vers le bas, et la fonction f admet un maximum M atteint lorsque $x = \dfrac{-b}{2a}$. On a bien sûr $M = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$.

On peut alors résoudre **l'équation $ax^2 + bx + c = 0$** : Trois cas se présentent :

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; alors $(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation n'a pas de solution.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; alors l'équation devient $a(x + \dfrac{b}{2a})^2 = 0$ et la solution est $x = \dfrac{-b}{2a}$

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; alors $(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$ se factorise (en utilisant: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$) :

$(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a})$ et on obtient les solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Dans ce cas , on a la factorisation : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple: Résoudre l'équation : $3x^2 - 2x - 1 = 0$: On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times3\times(-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2\times3} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2\times3} = \dfrac{6}{6} = 1$. Les solutions sont $\dfrac{-1}{3}$ et 1.

Exercice : Résoudre les équations : $3x^2 - 2x - 1 = 0$; $2x^2 + 3x - 1 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

Signe du trinôme : Signe de $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x :

Si $\Delta < 0$		Si $\Delta = 0$			Si $\Delta > 0$	(on suppose $x_1 <$ x_2)		
x	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$	$-b/(2a)$	$+\infty$	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de a	0	signe de a	signe de a	0 signe de $-a$	0	signe de a

Exemple: Résoudre l'inéquation : $3x^2 - 2x - 1 < 0$: On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times3\times(-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2\times3} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2\times3} = \dfrac{6}{6} = 1$. Le signe du trinôme est alors :

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $3x^2 - 2x - 1$		+	0	−	0	+	

La solution est $S = [\dfrac{-1}{3} ; 1]$.

Exercice : Résoudre les inéquations : $2x^2 + 3x - 1 > 0$; $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$; $3x^2 + 5x + 3 > 0$.