COURS 1S EXPERIENCE ALEATOIRE ET PROBABILITES

A. Généralités : le but de ce chapitre est de modéliser les résultats d'une expérience aléatoire ; cette expérience aléatoire comporte un nombre fini d'**issues** ; on désigne par Ω l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire, et on l'appelle l'**univers** ; si les issues sont notées e_i, pour i allant de 1 à n, on a $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Le nombre n d'issues est le **cardinal** de l'ensemble Ω, noté $\text{card}(\Omega) = n$.
Un **événement** A est une partie de Ω ; il est donc constitué d'un certain nombre d'issues de Ω ; le nombre d'éléments de A est son cardinal, noté card(A).
L'événement **complémentaire** de A, ou événement **contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'événement contenant tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
Un événement **élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue (à un seul élément e_i).
L'événement Ω est l'événement **certain**.
L'événement $\varnothing$ (ensemble vide) est l'événement **impossible**.
Soient A et B deux événements :
$A \cup B$ est l'événement constitué des éléments de A ou des éléments de B (lire : A union B);
$A \cap B$ est l'événement contenant les éléments qui sont à la fois dans A et dans B (lire A inter B).
Les événements A et B sont **disjoints**, ou **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. Les événements A et B n'ont aucun élément en commun.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge »; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».
L'univers contient les 32 cartes du jeu. Card(Ω) = 32. Card(A) = 16, Card(B) = 4 et Card(C) = 8.
$A \cap B$ est l'événement « tirer un roi rouge »; Card($A \cap B$) = 2.
$A \cup B$ est l'événement « tirer un roi ou une carte rouge »; Card($A \cup B$) = 18.
On remarque que Card($A \cup B$) = Card(A) + Card(B) – Card($A \cap B$).
Les événements A et C sont disjoints. $B \cap C$ est l'événement « tirer un roi de trèfle »; Card($B \cap C$) = 1.
$B \cup C$ est l'événement « tirer un roi ou un trèfle »; Card($B \cup C$) = 11.

B. Probabilité d'un événement : On définit, sur cette expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i. On note $P(\{e_i\}) = p_i$.
La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des p_i pour tous les éléments e_i de A.
Exemple : Si $A = \{e_1, e_2, e_4\}$ alors $P(A) = p_1 + p_2 + p_4$.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge »; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».
$p(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Propriétés des probabilités : $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$; pour tout événement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Cas de l'équiprobabilité : si tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ ont la même probabilité, qui est dans ce cas $P(\{e_i\}) = \frac{1}{Card(\Omega)}$, alors $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Suite de l'exemple: On est dans le cas de l'équiprobabilité : $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{16}$.
$P(A \cup B) = \frac{Card(A \cup B)}{Card(\Omega)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$. On a bien $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(B \cap C) = \frac{1}{32}$. $P(B \cup C) = \frac{11}{32}$.

Deuxième exemple: On lance un dé cubique équilibré deux fois. On note les événements :
A : « on obtient un 6 la première fois »;
B : « on obtient un 6 la deuxième fois ».
Réaliser un arbre de probabilités.
Calculer la probabilité des événements A, B, A ∩ B, A ∪ B, $\bar{A} \cap B$, $\bar{B} \cap A$.

Troisième exemple: On lance deux dés cubiques équilibrés. On note les événements :
A : « la somme des résultats est supérieure ou égale à 10 »;
B : « la somme des résultats est un nombre pair »;
C : « la somme des résultats est un multiple de 5 ».
Calculer la probabilité des événements A, B, C, A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C, A ∪ B, A ∪ C, B ∪ C.

C. Variables aléatoires : Si, à chaque issue e_i de l'expérience aléatoire, on associe un réel x_i, on définit alors une variable aléatoire X, qui à e_i associe x_i. La variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i. On note : P({X = x_i }) = p_i. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité P', appelé loi de la variable aléatoire X.
On définit alors : **l'espérance mathématique** de X, notée E(X), comme la moyenne pondérée des x_i affectés des coefficients p_i : E(X) = $\sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.
La variance de X, notée V(X), comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des x_i :
V(X) = $\sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2$
L'écart-type de X , noté s(X), comme la racine carrée de la variance : s(X) = $\sqrt{V(X)}$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires sur la même expérience et un réel a ; on a
E(X + Y) = E(X) + E(Y) ; E(aX) = aE(X) ; V(X) = E(X − E(X))^2 = E(X^2) − (E(X))^2 ;
V(aX) = a^2V(X) ;
V(X + a) = V(X) ; s(X + a) = s(X) ; s(aX) = |a|s(X).

Exemple: On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.
L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.
1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
b) Déterminer son espérance mathématique et son écart-type.
2. La variable aléatoire Y est égale au produit des numéros des deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
b) Déterminer son espérance mathématique et son écart-type.