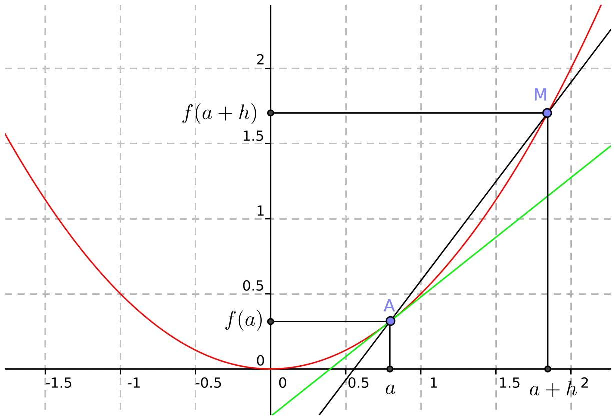
COURS — PREMIÈRE — DERIVATION

A. Dérivabilité en un point

1. Nombre dérivé :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$ et un réel a de I. On considère le point $A(a ; f(a))$ de la courbe C_f et le point $M(a+h ; f(a+h))$ pour h réel tel que $a+h$ est dans I.



Pour h non nul, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A (c'est-à-dire lorsque h tend vers 0), la droite (AM) se rapproche de la position d'une droite particulière, appelée tangente à la courbe au point A.

Définition : Si la limite lorsque h tend vers 0, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, alors on dit que la fonction f est dérivable en a et la limite est appelé le **nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$.

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Cette dernière limite est obtenu en posant $x = a + h$.

$f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à C_f au point A ;
l'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

➔ Voir une animation sur le nombre dérivé: http://dominique.frin.free.fr/geogebra/nbre_derive.html .

2. Approximation affine :

Pour h proche de 0, $f(a+h)$ est proche de $f'(a)h + f(a)$; on dit que $f'(a)h + f(a)$ est une approximation affine de $f(a+h)$ lorsque h est proche de 0. Si l'on pose $x = a + h$, on obtient que $f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ lorsque x est proche de a.

Exemples : Pour h proche de 0, $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$; $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$; $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$ ...

Et pour x proche de 1, $x^2 \approx 2x - 1$; $\dfrac{1}{x} \approx x$; $x^3 \approx 3x - 2$ ...

Attention : Le nombre dérivé n'existe pas toujours : Les fonctions valeur absolue et racine carrée n'ont pas de nombre dérivé en 0 (pour la valeur absolue, il y a deux tangentes en 0, une à droite et une à gauche; et pour la racine carrée, la tangente est l'axe des ordonnées).

B. Fonction dérivée

1. Définition :

Si la fonction f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on définit alors la fonction f' qui à x associe $f'(x)$; on l'appelle la fonction dérivée de f sur I.

Exemples dans le tableau ci-contre:

$f(x)$	***Dérivable sur***	$f'(x)$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstrations: Dérivée de $f(x) = x^2$: On cherche le nombre dérivé de f en a réel: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2a+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2a+h) = 2a$ qui existe pour tout réel a.

Donc la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = 2x$.

Dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x}$: On cherche le nombre dérivé de f en a réel non nul:

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{ah(a+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = \dfrac{-1}{a^2}$ qui existe pour tout réel a non nul. Donc la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$ est $f\,'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Pour les dérivées des fonctions cosinus et sinus, il faut utiliser les formules d'addition de cosinus et sinus.

Exemples de fonctions dérivables : Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, ainsi que les fonctions cosinus et sinus. Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition. Pour déterminer les dérivées d'autres fonctions, il faut utiliser les propriétés suivantes:

2. Opérations sur les fonctions dérivées : On considère des fonctions u et v dérivables sur $D_{u'}$ et $D_{v'}$. Le tableau ci-contre donne les dérivées de fonctions obtenues à partir de u et v :

f(x)	***Dérivable sur***	***f '(x)***
$ku(x)$	$D_{u'}$	$ku'(x)$
$u + v$	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u' + v'$
uv	$D_{u'} \cap D_{v'}$	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$D_{u'} \cap \{x$ tel que $u(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$D_{u'} \cap D_{v'} \cap \{x\ ;\ v(x) \neq 0\}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
u^n	$D_{u'}$	$nu'\,u^{n-1}$
$u(ax+b)$	$D_{u'}$	$au'(ax+b)$

Démonstration pour uv : Soit $a \in D_{u'} \cap D_{v'}$; on cherche le nombre dérivé de $u(x)v(x)$ en a:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)\,v(a)}{h}$ = *(On ajoute et soustrait la même quantité)* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)\,v(a+h)-u(a)\,v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$ =

(On factorise) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)(u(a+h)-u(a))+u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}$ =

(On fait apparaître des nombres dérivés)

$\lim\limits_{h\to 0} \left(v(a+h)\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+u(a)\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)$ =

(On simplifie l'expression)

$\lim\limits_{h\to 0} v(a+h)\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}+u(a)\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$ $= v(a)u'(a) + u(a)v'(a)$.

Donc la fonction dérivée de uv est $(uv)'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$.

C. Applications des dérivées

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et f ' sa fonction dérivée. On a :

Si pour tout x de I, $f\,'(x) \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f\,'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f\,'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

2. Extremas d'une fonction : Soit $a \in$ I distinct des extrémités de I ; si f admet un extremum local en a , alors $f\,'(a) = 0$. (Extremum : maximum ou minimum)

Réciproquement : si $f\,'(a) = 0$ et $f\,'$ change de signe en a , alors f admet un extremum local en a .

3. Monotonie : Si f est dérivable sur I et strictement monotone, alors pour tout c de f (I), il existe un unique k de I tel que $f(k) = c$.

Applications : f dérivable sur]a ; b[et strictement monotone, $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors il existe un unique α de]a ; b[tel que $f(\alpha) = 0$.

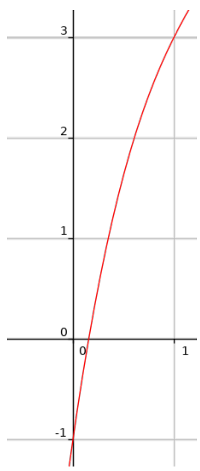
Exemples :

1) Existence d'une solution de $x^3 - 4x^2 + 7x - 1 = 0$: la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = 3x^2 - 8x + 7$.

Pour trouver le signe de cette dérivée, on calcule le discriminant de ce polynôme du second degré: $\Delta = (-8)^2 - 4\times3\times7 = -20 < 0$; donc $f\,'(x)$ ne s'annule pas et est du signe de $3 > 0$; donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$;

comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 3$ de signes contraires,

alors il existe α dans]0 ; 1[tel que $f(\alpha) = 0$.



2) Existence d'une solution de l'équation $f(x) = 2$ où $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (et approximation des solutions ?)

$f\,'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1;-1\}$; le signe dépend de $x^2 - 3$ qui s'annule en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a une unique solutions à l'équation $f(x) = 2$, dans $]-1;1[$, car $\dfrac{-3\sqrt{3}}{2} < 0$ (donc pas de solution dans $]-\infty;-\sqrt{3}\,[$) ; et $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 2$ (donc pas de solution dans $]1\,;+\infty[$).

La courbe représentative de f :