COURS — PREMIÈRE — LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. La fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée la fonction exponentielle et est notée exp.

Démonstration : L'existence de la fonction est admise. On peut toutefois démontrer l'unicité:
on considère la fonction g vérifiant pour tout réel x, $g'(x) = g(x)$ et tel que $g(0) = 1$.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Cette fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on admet que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

On a $h'(x) = \dfrac{g'(x)\times f(x) - g(x)\times f'(x)}{f(x)^2} = \dfrac{g(x)\times f(x) - g(x)\times f(x)}{f(x)^2} = 0$.

Donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $h(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ et donc $g(x) = f(x)$. La fonction exp est donc unique.

2. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété fondamentale: La fonction exponentielle transforme une somme en un produit:
Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Propriétés : Pour tous réels x et y, $\exp(x) > 0$; $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$,

et pour tout entier naturel n, $(\exp(x))^n = \exp(nx)$.

Démonstration : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ pour y réel fixé.

(On sait que $\exp(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$). La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\times\exp(x) - \exp(x+y)\times\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$; donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$, et égale à

$g(0) = \exp(y)$. D'où $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$. Ainsi, pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

Propriété 2: En prenant $y = -x$, il vient $\exp(x + y) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$,

donc $1 = \exp(x)\exp(-x)$ et ainsi $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété 3: De plus, $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Notation : La fonction exponentielle a les mêmes propriétés que celles portant sur les puissances entières. On décide de noter $\exp(x) = e^x$.
La calculatrice nous donne $\exp(1) = e^1 = e \simeq 2{,}7182821828...$

Résumé : Pour tous réels x et y, et tout entier relatif n :

$e^0 = 1$ $\qquad$ $e^x > 0$

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\qquad$ $(e^x)^n = e^{xn}$

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

3. Étude de la fonction exponentielle

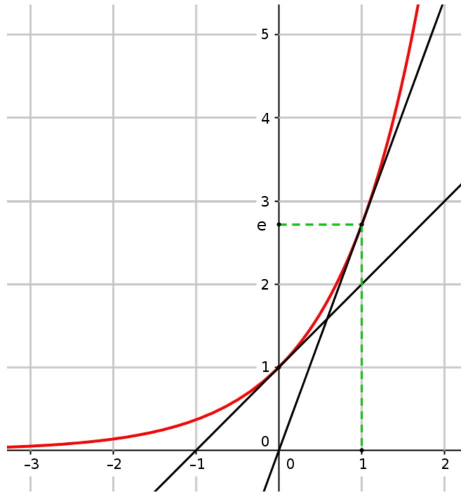
a) Variations: D'après l'étude précédente, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
D'après les propriétés, la fonction exponentielle est strictement positive, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	1	$+\infty$

On en déduit : pour tous réel a et b,
$e^a = e^b$ équivaut à $a = b$;
et $e^a \leq e^b$ équivaut à $a \leq b$.

b) Représentation graphique de la fonction exponentielle:

Tangentes à la courbe représentative de exp:



Au point d'abscisse 0: l'équation de la tangente est
$y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$.

Au point d'abscisse 1: l'équation de la tangente est
$y = \exp'(1)(x - 1) + \exp(1) = \mathrm{e}x - \mathrm{e} + \mathrm{e} = \mathrm{e}x$.
Cette tangente passe par l'origine du repère.

Position de la courbe par rapport à ces tangentes:
Il s'agit de montrer que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.
Pour cela, considérons l'équation de la tangente T à la courbe C de la fonction exponentielle au point d'abscisse a :
$y = \exp'(a)(x - a) + \exp(a) = \mathrm{e}^a\,(x - a + 1)$.
Pour étudier la position de C par rapport à T, il suffit d'étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a\,(x - a + 1)$.
Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f\,'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^a$. Cette dérivée s'annule en $x = a$ et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ a]$ et croissante sur $[a; +\infty\ [$. Elle admet donc un minimum en $x = a$ qui vaut $f(a) = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a\,(a - a + 1). = 0$.
Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout réel x , $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^a\,(x - a + 1)$.
Donc la courbe C est toujours au-dessus des tangentes T.
Une telle fonction est appelée une fonction convexe.

v) Dérivée de e^u où u est une fonction linéaire.

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = kx$ où k est un réel. La fonction e^u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $u'\times\mathrm{e}^u = k\mathrm{e}^{kx}$.
Comme $\mathrm{e}^{kx} > 0$, cette fonction dérivée est du signe de k.

Exemple: Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = \exp(-2x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f\,'(x) = -2\ \mathrm{e}^{-2x}$. On sait que, pour tout réel x, e^x est strictement positif, donc $\mathrm{e}^{-2x} > 0$. Le signe de la dérivée est donné par le signe de $-2 < 0$.
D'où le tableau de variations de cette fonction :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f\,'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$