1. Géométrie analytique :

Dans ce chapitre, on considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Rappels : Si les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\vec{u}\,(x; y)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan. Alors la distance $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2} ; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

2. Vecteur normal à une droite :

a) Définition : Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite (d) si et seulement si pour tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (d) le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

b) Propriété : Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Réciproquement : soit (d) une droite du plan et A un point de (d); la droite (d) est l'ensemble des points M du plan tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$.

3. Équation cartésienne d'une droite du plan :

Théorème : Soit $\vec{n}\,(a; b)$ un vecteur non nul.

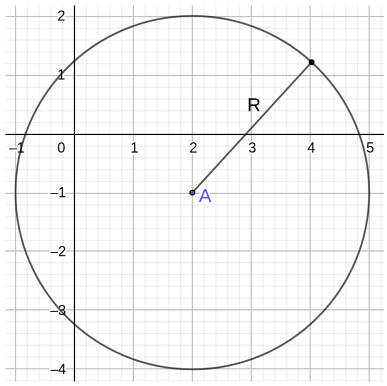
La droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ appelée équation cartésienne de la droite (d).

Démonstration : Pour tout point $M(x; y)$ de (d) passant par A et orthogonal à $\vec{n}\,(a; b)$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, soit
$ax + by - ax_A - by_A = 0$ qui est une équation de la forme $ax + by + c = 0$ en posant $c = -ax_A - by_A$.

Exemple : On considère le point $A(1 ; -2)$ et le vecteur $\vec{n}\,(4 ; 3)$; la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation $4x + 3y + c = 0$; pour déterminer la valeur de c, on remplace x et y par les coordonnées de A : $4\times1 + 3\times(-2) + c = 0$, soit $4 - 6 + c = 0$, soit $c = 2$; l'équation cartésienne de (d) est $4x + 3y + 2 = 0$.

4. Équation cartésienne d'un cercle :

Un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que la distance ΩM est égale au rayon du cercle R, soit $\Omega M = R$, soit $\Omega M^2 = R^2$, soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ qui est l'équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon R.



Exemples : a) déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $A(2 ; -1)$ et de rayon 3 : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Figure ci-contre :

b) déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-4 ; -5)$ et passant par le point $A(1 ; -2)$:

On calcule d'abord le rayon du cercle :

$R = \Omega A = \sqrt{(1-(-4))^2+(-2-(-5))^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$;

donc l'équation cartésienne du cercle est $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 34$.

c) déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] avec $A(-3 ; 2)$ et $B(7 ; -6)$:

On trouve d'abord les coordonnées du centre Ω du cercle qui est le milieu du diamètre [AB] :

$\Omega\left(\dfrac{x_A+x_B}{2} ; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right) = (2 ; -2)$;

On calcule ensuite le rayon du cercle : $R = \Omega A = \sqrt{(1-(-4))^2+(-2-(-5))^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$;

donc l'équation cartésienne du cercle est $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 34$.

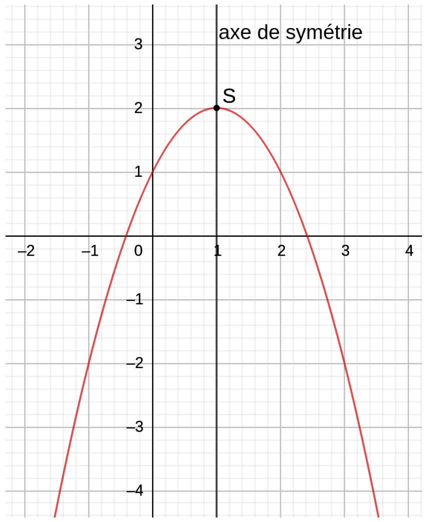
d) L'équation suivante est-elle une équation de cercle ? $x^2 + 2x + y^2 + 8y - 1 = 0$:
Pour le savoir, il faut trouver l'équation cartésienne du cercle : $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ et $y^2 + 8y = (y + 4)^2 - 16$ à l'aide des identités remarquables (ou forme canonique des polynômes) ;
on trouve alors $x^2 + 2x + y^2 + 8y - 1 = (x + 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 - 1 = (x + 1)^2 + (y + 4)^2 - 18 = 0$,
soit $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 18$, qui est l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1 ; -4)$ et de rayon $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

5. Équation dune parabole :

On considère une fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
La courbe représentative de f est une parabole dont l'équation est $y = ax^2 + bx + c$.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha ; \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\dfrac{-b}{2a}) = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$.

La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$.



L'équation de la parabole tracée ci-contre est $y = -x^2 + 2x + 1$:
Son sommet est le point $S(1 ; 2)$ et l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 1$.

6. Distance d'un point à une droite :

Théorème : Soit A un point du plan, $\vec{n}$ un vecteur non nul et (d) la droite orthogonale à $\vec{n}$ et passant par A. Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite (d). Alors la distance MH, appelée distance du point M à la droite (d) est égale à $\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
C'est la plus courte distance du point M à la droite (d).

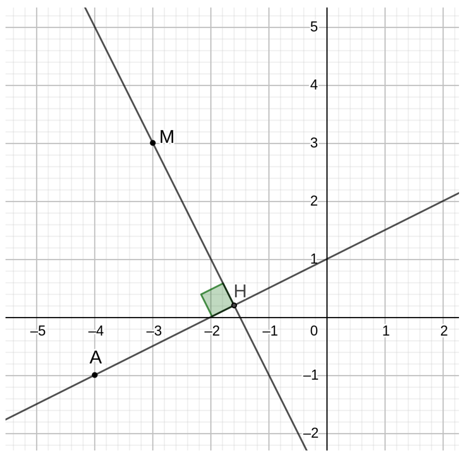
Démonstration : Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est colinéaire à $\vec{n}$; donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HM} = k\,\vec{n}$; de plus $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$; d'où $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM})\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ puisque les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = k\,\vec{n}\cdot\vec{n} = k.\|\vec{n}\|^2$. Donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$ et ainsi

$\overrightarrow{HM} = k\,\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$. D'où $HM = \left|\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right| \|\vec{n}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Propriété : Soit $M_0\,(x_0 ; y_0)$ un point du plan et (d) la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Alors la distance du point M_0 à la droite (d) est égale à $\dfrac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Démonstration : Le vecteur $\vec{n}\,(a ; b)$ est un vecteur normal à (d) et $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Soit $A(x_1 ; y_1)$ un point de (d). On a donc $ax_1 + by_1 + c = 0$.
Alors pour tout point $M(x_0 ; y_0)$ du plan,
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1 = ax_0 + by_0 + c$.

D'où la distance de M_0 à (d) est égale à $\dfrac{|\overrightarrow{AM_0}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



Exemple : La droite ci-contre a pour équation $x - 2y + 2 = 0$, le point $M(-3 ; 3)$. La distance du point M à la droite (d) est égale à
$\dfrac{|1\times(-3)+(-2)\times3+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-3-6+2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.