

A. Généralités : le but de ce chapitre est de modéliser les résultats d'une expérience aléatoire ; cette expérience aléatoire comporte un nombre fini **d'issues** ; on désigne par Ω l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire, et on l'appelle **l'univers** ; si les issues sont notées e_i , pour i allant de 1 à n , on a $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Le nombre n d'issues est le **cardinal** de l'ensemble Ω , noté $\text{card}(\Omega) = n$. Un **événement** A est une partie de Ω ; il est donc constitué d'un certain nombre d'issues de Ω ; le nombre d'éléments de A est son cardinal, noté $\text{card}(A)$.

L'événement **complémentaire** de A , ou événement **contraire** de A , noté \bar{A} , est l'événement contenant tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A .

Un événement **élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue (à un seul élément e_i).

L'événement Ω est l'événement **certain**.

L'événement \emptyset (ensemble vide) est l'événement **impossible**.

Soient A et B deux événements :

$A \cup B$ est l'événement constitué des éléments de A ou des éléments de B (lire : A union B) ;

$A \cap B$ est l'événement contenant les éléments qui sont à la fois dans A et dans B (lire A inter B).

Les événements A et B sont **disjoints**, ou **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$. Les événements A et B n'ont aucun élément en commun.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge » ; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».

L'univers contient les 32 cartes du jeu. $\text{Card}(\Omega) = 32$. $\text{Card}(A) = 16$, $\text{Card}(B) = 4$ et $\text{Card}(C) = 8$.

$A \cap B$ est l'événement « tirer un roi rouge » ; $\text{Card}(A \cap B) = 2$.

$A \cup B$ est l'événement « tirer un roi ou une carte rouge » ; $\text{Card}(A \cup B) = 18$.

On remarque que $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Les événements A et C sont disjoints. $B \cap C$ est l'événement « tirer un roi de trèfle » ; $\text{Card}(B \cap C) = 1$.

$B \cup C$ est l'événement « tirer un roi ou un trèfle » ; $\text{Card}(B \cup C) = 11$.

B. Probabilité d'un événement : On définit, sur cette expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i . On note $P(\{e_i\}) = p_i$.

La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la somme des p_i pour tous les éléments e_i de A .

Exemple : Si $A = \{e_1, e_2, e_4\}$ alors $P(A) = p_1 + p_2 + p_4$.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge » ; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».

$$p(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ et } p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Propriétés des probabilités : $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$; pour tout événement A , $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Cas de l'équiprobabilité : si tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ ont la même probabilité, qui est dans ce cas

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}, \text{ alors } P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Suite de l'exemple: On est dans le cas de l'équiprobabilité : $P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{1}{16}$.

$$P(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}. \text{ On a bien } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{32}. P(B \cup C) = \frac{11}{32}.$$

Deuxième exemple: On lance un dé cubique équilibré deux fois. On note les événements :

A : « on obtient un 6 la première fois » ;

B : « on obtient un 6 la deuxième fois ».

Réaliser un arbre de probabilités.

Calculer la probabilité des événements $A, B, A \cap B, A \cup B, \bar{A} \cap B, \bar{B} \cap A$.

Troisième exemple: On lance deux dés cubiques équilibrés. On note les événements :

A : « la somme des résultats est supérieure ou égale à 10 »;

B : « la somme des résultats est un nombre pair »;

C : « la somme des résultats est un multiple de 5 ».

Calculer la probabilité des événements A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.

C. Probabilités conditionnelles :

1. Définition et propriétés :

Définition : Soit A un événement de l'univers tel que $P(A) \neq 0$. On définit sur une nouvelle probabilité,

notée P_A , telle que pour tout événement B, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Cette probabilité P_A est appelée la probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. On note aussi $P_A(B) = P(B/A)$ (Probabilité de B sachant A).

Remarque : On a donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Exemple : On tire au hasard deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant 4 boules bleues et 3 boules jaunes. Quelle est la probabilité de tirer deux boules jaunes ?

Notons A l'événement: «tirer une boule jaune en premier» et B l'événement: «tirer une boule jaune en second ».

On cherche $P(A \cap B)$. On sait que $P(A) = \frac{3}{7}$. Pour la deuxième boule, on cherche $P_A(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisqu'il

ne reste que 6 boules dans l'urne et 2 jaunes. Ainsi $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

Propriétés: a) Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.

b) Soient A, B et C trois événements tels que $P(A) \neq 0$. Si A et B sont disjoints (ou incompatibles), alors $P_A(B) = 0$. Si C est contenu dans B (ou inclus dans B), noté $C \subset B$, alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.

$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

2. Formule des probabilités totales

a) Notion de partition : On dit que les événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, si l'intersection des événements pris deux à deux est vide et si la réunion de tous ces événements est l'univers .

Exemple: = Résultats du lancer d'un dé cubique = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les événements $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ et $A_3 = \{6\}$ forment une partition de Ω .

Théorème : Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, n événements de probabilité non nulle formant une partition de Ω .

Alors, pour tout événement B, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + P_{A_3}(B) \times P(A_3) + \dots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$.

Démonstration : En fait, les événements $(A_n \cap B)$ forment une partition de Ω , et

$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)$, d'où $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$.

Donc $P(B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$.

Remarque: Si A n'est pas vide, les événements A et \bar{A} forment une partition de Ω .

Ainsi, pour tout événement B, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Exemple: Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints de la maladie Ma, 20% ont une maladie Mb et parmi les individus non atteints de la maladie Ma, 4% ont la maladie Mb. On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants: "l'individu est atteint de la maladie Ma", "l'individu est atteint de la maladie Mb".

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = 0,2 \times 0,15 + 0,04 \times 0,85 = 0,064$, soit 6,4% des individus de la population sont atteint de la maladie Mb.

3. Indépendance d'événements

Définition: On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriétés : Soient A et B deux événements de l'univers, de probabilité non nulle. A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

Si A et B sont indépendants, alors \bar{A} et B, A et \bar{B} , \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

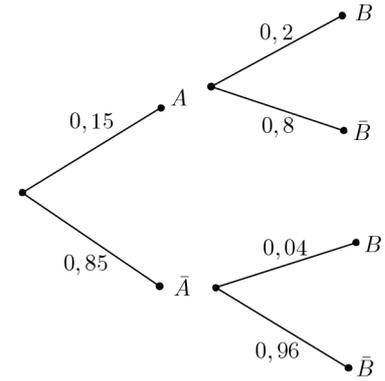
Démonstration en exercice.

4. Arbres de probabilités

Règles d'utilisation: La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet événement.

Premier exemple : voici l'arbre de probabilité correspondant à l'exemple de la partie C. 2 :



Autre exemple : Dans une région ostréicole, on s'intéresse à la production d'huîtres. Une partie de la production est conditionnée par calibre, en bourriche étiquetées : P (petite), M (moyenne) et G (grande).

la proportion d'huîtres de chaque catégorie est : pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %. Par ailleurs, la probabilité d'erreur lors d'un tri est estimée en fonction de la catégorie de la façon suivante :

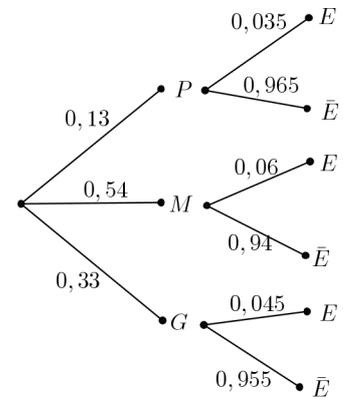
Catégorie	P	M	G
Probabilité d'erreur	0,035	0,06	0,045

L'arbre de probabilités correspondant est:

Si E est l'événement : « une huître a été mal triée », alors la probabilité de E est $P(E) = P(E \cap P) + P(E \cap M) + P(E \cap G) = 0,13 \times 0,035 + 0,54 \times 0,06 + 0,33 \times 0,045 = 0,0518$.

La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est égale

$$\text{à } P_E(M) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0,54 \times 0,06}{0,0518} = 0,625.$$



D. Variables aléatoires : Si, à chaque issue e_i de l'expérience aléatoire, on associe un réel x_i , on définit alors une variable aléatoire X, qui à e_i associe x_i . La variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i . On note : $P(\{X = x_i\}) = p_i$. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité P', appelé loi de la variable aléatoire X.

On définit alors : **L'espérance mathématique** de X, notée $E(X)$, comme la moyenne pondérée des x_i affectés des coefficients p_i : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.

La variance de X, notée $V(X)$, comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des x_i :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2.$$

L'écart-type de X, noté $s(X)$, comme la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires sur la même expérience et un réel a ; on a $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $E(aX) = aE(X)$; $V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$; $V(aX) = a^2V(X)$; $V(X + a) = V(X)$; $s(X + a) = s(X)$; $s(aX) = |a|s(X)$.

Exemple: On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.

L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.

1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés et la variable aléatoire Y est égale au produit des numéros des deux jetons tirés..

- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X et la loi de la variable aléatoire Y.
- b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de X et de Y.

Variables aléatoires indépendantes :

Définition: Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers. X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , et Y prend les valeurs y_1, y_2, \dots, y_m . On dit que X et Y sont indépendantes si pour tous i et j ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$), les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.