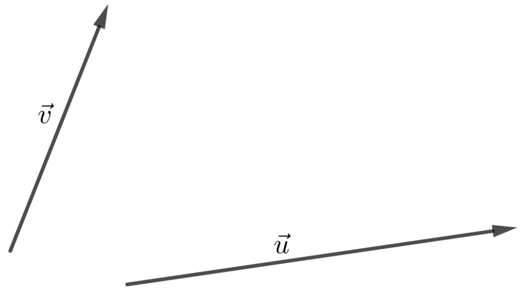
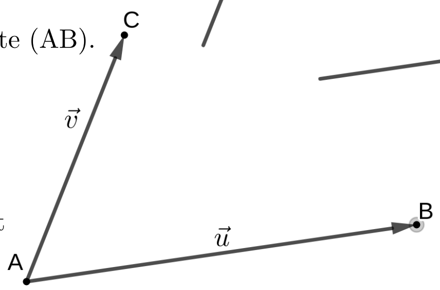
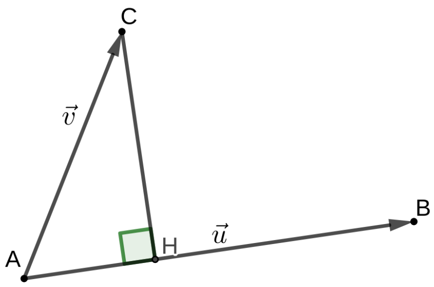
1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs :

a) Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques du plan. On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
On définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.



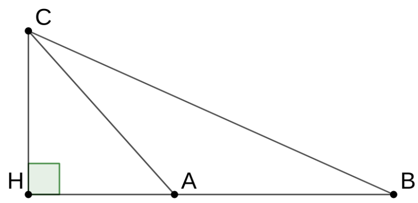
b) Projeté orthogonal :
On considère les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$; alors
$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens;
$\vec{u} \cdot \vec{v} = - AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.





c) Exemples :
1) Le triangle ABC est équilatéral de côté 4,
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = 8$.
2) Le triangle ABC est rectangle en A et AB = 3, AC = 6 ;
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 6 \times \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3) Sur la figure ci-dessus, si AB = 5, AH = 2,
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 10$.
4) Sur la figure ci-contre, si AB = 3, AH = 2,
alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 2 \times \cos(\pi) = - 6$.



2. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et tout réel k,
$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

b) Égalités remarquables :
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;
$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) .$$

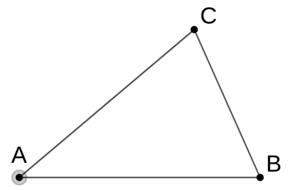
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, avec $\vec{u}\,(x; y)$ et $\vec{v}\,(x'; y')$,
alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

3. Orthogonalité dans le plan :

a) Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques du plan. On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

b) Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

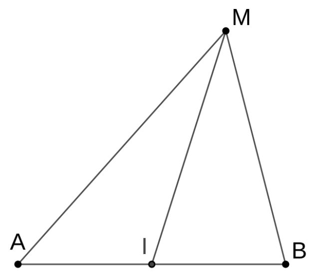
4. Formule d'Al Kashi :



On considère un triangle ABC. Alors $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB})$.
De même, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$ et
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

<u>Démonstration :</u>
$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} =$
$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\,\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos(\widehat{ACB})$.

4. Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$:



On considère deux points A et B distincts et I le milieu de [AB].

Alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

Cette relation est appelée formule de la médiane.

<u>Démonstration :</u> $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$;
comme I est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$;

donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

<u>Application :</u> L'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

<u>Démonstration :</u> $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ équivaut à $MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 0$ équivaut à $MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} = IA^2$, donc M est sur le cercle de centre I milieu de [AB] et de rayon $IA = \dfrac{AB}{2}$; donc M est sur le cercle de diamètre [AB].