A. Notation - Définition

Définition : une suite numérique (u_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note (u_n) la suite de nombres u_0, u_1, u_2,..., u_n, ... Le nombre u_n est le terme d'indice n (ou de rang n).
u_o est le premier terme de la suite.
Exemples : $u_n = 3^n$ (formule explicite en fonction de n) , $u_n = (1 + 5/100)^n$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et u_o donné (formule récurrente : un terme de la suite s'écrit en fonction du ou des précédents),
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et u_o donné ...

B. Les suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n ,
$u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.
Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : S = $n \times$ (demie somme des termes extrêmes) .

Exemples : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$;

la somme des n premiers entiers consécutifs non nuls est égale à $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration : On écrit la somme de deux façons différentes : $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$
$S = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 2 + 1$.
On effectue la somme terme à terme ; on obtient :
$2S = 1 + n + 2 + (n - 1) + 3 + (n - 2) + ... + (n - 1) + 2 + n + 1$
on simplifie : $2S = n + 1 + n + 1 + n + 1 + ... + n + 1 = n(n + 1)$; donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

C. Les suites géométriques

La suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : Si $q \neq 1$, S = premier terme $\times \dfrac{1-q^n}{1-q}$

et si $q = 1$, S = $n \times$ premier terme.

Exemples : (si $q \neq 1$), $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. $1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration : Pour tout réel x, on a $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x + 1)$ (vérification par développement). D'où, si $x \neq 1$, $\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x + 1$; d'où le résultat.

D. Sens de variation d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **croissante** si,
pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
La suite (u_n) est **strictement croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
La suite (u_n) est **strictement décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
Technique : a) on peut chercher à comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0, ou si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.
b) Si $u_n = f(n)$, alors les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donne les variations de (u_n).

Exemple : sens de variation d'une suite arithmétique : $f(n) = u_0 + nr$, f est une fonction affine;
si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

E. Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Technique : pour montrer qu'une suite est majorée (resp. minorée), et si $u_n = f(n)$, alors on cherche à majorer (resp. minorer) $f(x)$ sur $[0 ; +\infty [$.

Exemple: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Cette suite est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée par 0 et 1.

F. Limite d'une suite

Définition : Une suite (u_n) est une suite **convergente** vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Le nombre réel l est la limite de la suite (u_n), on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente (sa limite est infinie ou n'existe pas).
Technique : si $u_n = f(n)$, alors la limite de la fonction f en $+\infty$ est la limite de la suite (u_n).
Théorèmes (de comparaison) : Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si les deux suites convergent, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
<u>Théorème des gendarmes:</u> Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$
Démonstration du théorème des gendarmes: La suite (v_n) converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_1 . De même, la suite (w_n) converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (w_n) à partir d'un certain rang n_2 . En prenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang n_0 puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Donc la suite (u_n) converge vers l.

Exemples:

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et cette suite converge vers 1.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$, donc la suite est strictement croissante, minorée par 1 et non majorée. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc la suite est divergente.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1}$. On considère alors les suites (v_n) et (w_n) définies par

$v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ et $w_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. Alors, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$,
donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Limite d'une suite arithmétique : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors, si $r > 0$, la limite de la suite est $+\infty$; si $r < 0$, la limite de la suite est $-\infty$.

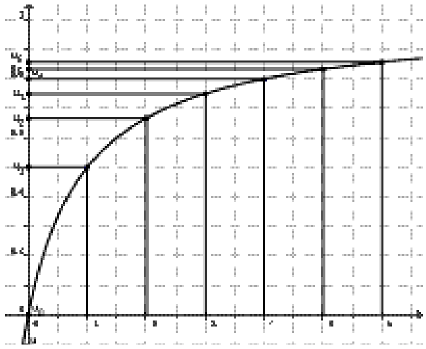
Limite d'une suite géométrique: Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

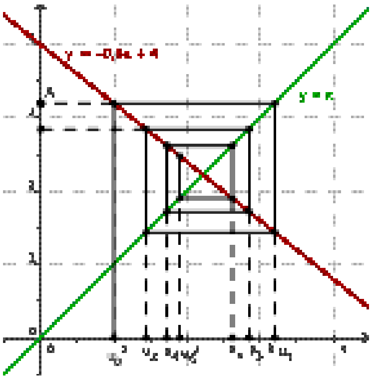
	$u_0 > 0$					$u_0 > 0$				
	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$-1 < q < 0$	$q \leqslant -1$	$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	$-1 < q < 0$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	u_0	0	0	Pas de limite	$-\infty$	u_0	0	0	Pas de limite

G. Représentation graphique d'une suite

Si la suite (u_n) a son terme général défini en fonction de n, on représente la suite dans un repère du plan, par un ensemble de points de coordonnées $(n;\, u_n)$. Cette représentation graphique permet de visualiser les variations de la suite et éventuellement la convergence.

Exemple: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Les sept premiers termes de la suite sont représentés ci-contre.
On peut conjecturer que la suite est strictement croissante et qu'elle converge vers 1.





Si la suite (u_n) est définie par récurrence, de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, on représente la suite dans un repère du plan, en utilisant la représentation graphique de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

Exemple: $u_{n+1} = -\,0{,}8u_n + 4$ et $u_0 = 1$.
Les sept premiers termes de la suite sont représentés ci-contre.
On peut conjecturer que la suite n'est ni croissante, ni décroissante et qu'elle converge vers l, où l est solution de l'équation $-\,0{,}8x + 4 = x$, soit $l = 20/9$.

La représentation graphique d'une suite arithmétique donne des points alignés ; la droite a pour coefficient directeur la raison de la suite et pour ordonnée à l'origine le premier terme de la suite.