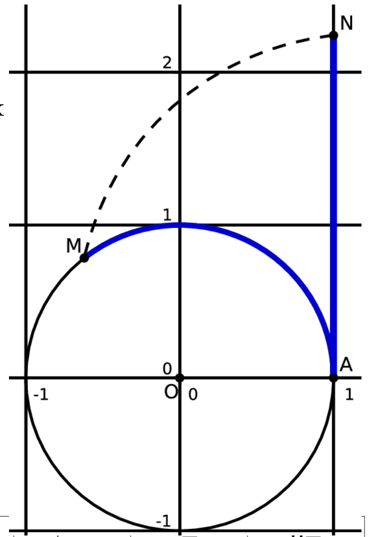
A. Enroulement autour du cercle



On considère un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan et le cercle de centre O et de rayon 1 ; il y a deux sens de parcours possible du cercle ; l'un des deux est appelé sens direct et l'autre sens indirect. Le sens direct est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre.
Ce cercle orienté est appelé le cercle trigonométrique.

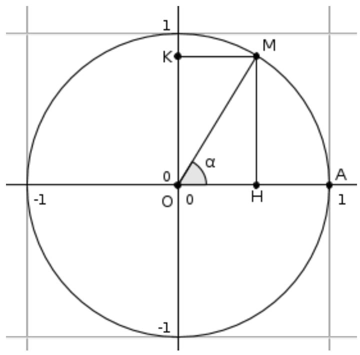
On considère la droite (d) d'équation $x = 1$ et le point A(1 ; 0) de (d).
On enroule la droite (d) autour du cercle. A chaque point N de la droite d'ordonnée $\alpha \in \mathbb{R}$, on associe un point M du cercle.
L'arc $\widehat{AM}$ a pour longueur $|\alpha|$. Voir : <u>enroulement.ggb</u>

On obtient une correspondance entre
la longueur de l'arc $\widehat{AM}$ et l'angle $\widehat{AOM}$:

Longueur de l'arc $\widehat{AM}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
Angle $\widehat{AOM}$ en degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180	360

On définit ainsi une nouvelle mesure d'angle, appelé angle en radian qui est un nombre réel.
Exemples : $\frac{\pi}{2}$ radians = 90° ; 1 radian ≃ 57,3° ; π radians = 180°.
Si α est positif, on tourne dans le sens direct, sinon on tourne dans le sens indirect.

B. Cosinus et sinus d'un angle



On définit alors le cosinus et le sinus de tout nombre réel comme étant les coordonnées du point M du cercle trigonométrique ;
on a alors M(cos(α); sin(α)).
<u>Propriétés</u> :
on vérifie aisément : pour tout réel α,
$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$; $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$.
Pour tout réel x et $k \in \mathbb{Z}$,

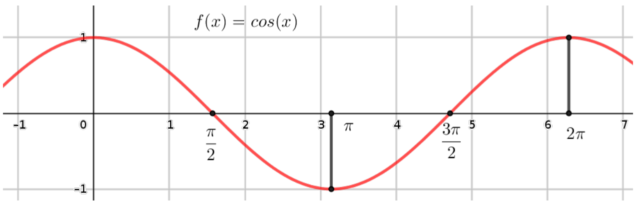
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

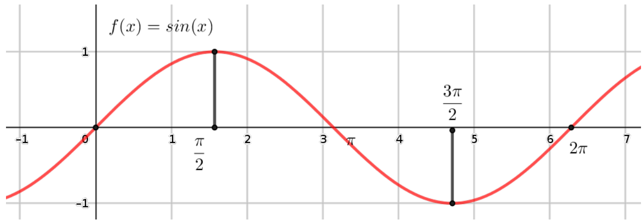
Valeurs exactes de cosinus et sinus :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

C. Fonctions sinus et cosinus

1. Définition : La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur R par $x \to \sin(x)$.
La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur R par $x \to \cos(x)$.
Les courbes représentatives de ces fonctions :





2. Propriétés :
a) Périodicité : Les foncions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π ;
c'est-à-dire que pour tout réel x,
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
b) Parité :
Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$; on dit que la fonction cosinus est une fonction paire ; sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$; on dit que la fonction sinus est une fonction impaire ; sa courbe représentative admet l'origine comme centre de symétrie.

C. Résolution d'équations trigonométrique :

a) Soit M(x ; y) un point du cercle de centre O(0 ; 0) et de rayon 1.
Soit α l'angle $\widehat{AOM}$ en radian.

On considère le réel a ; l'équation $\cos(\alpha) = \cos(a)$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: $S = \{\alpha ; -\alpha\}$.
L'équation $\sin(\alpha) = \sin(a)$ a deux solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: $S = \{\alpha ; \pi - \alpha\}$.
Exemples :

Compléments : Le cercle trigonométrique et les angles particuliers ainsi que les sinus et cosinus de ces angles.