

1. Rappels de géométrie dans l'espace

- Un plan de l'espace est déterminé par trois points non alignés, une droite et un point n'appartenant pas à cette droite, deux droites parallèles ou deux droites sécantes.
- Deux droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles (dans ces deux cas, elles sont coplanaires), ou non coplanaires (un plan ne peut pas contenir les deux droites).
- Une droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan ;
- L'intersection de deux plans non parallèles est une droite ;
- Si un plan coupe un autre plan P selon la droite d , alors il coupe tout plan parallèle à P selon une droite parallèle à d ;
- Théorème « du toit » : si trois plans sont sécants deux à deux, alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles ;
- Dans tout plan de l'espace, tout théorème de géométrie plane est vrai.

Démonstration possible du « théorème du toit » (disjonction des cas et raisonnement par l'absurde).

On appelle d la droite d'intersection des plans P' et P'' , d' la droite d'intersection des plans P'' et P, d'' la droite d'intersection des plans P et P' .

- a) Si les droites d' et d'' sont sécantes, leur point d'intersection I appartient au plan P'' (qui contient d') et au plan P' (qui contient d''); il appartient donc à leur droite d'intersection d . Donc les droites d , d' et d'' sont concourantes en I.
- b) Si les droites d' et d'' sont parallèles, supposons que les droites d et d' se coupent en un point I. Alors, par le même raisonnement qu'au a), les droites d , d' et d'' sont concourantes, ce qui contredit l'hypothèse.

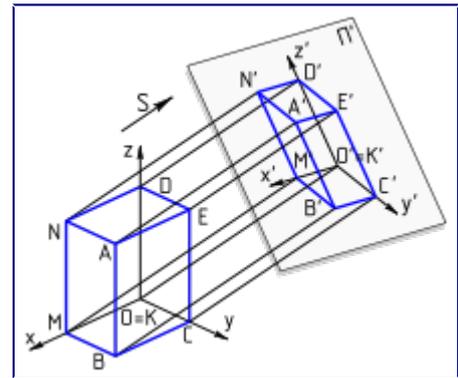
2. Représentation en perspective parallèle

a) On donne un plan P et une droite D non parallèle à P.

Le projeté d'un point M sur le plan P parallèlement à la droite D est le point d'intersection du plan P avec la parallèle à D passant par M. Une projection sur un plan parallèlement à une droite est appelée perspective parallèle.

b) Propriétés de cette projection

- **L'image d'une droite (MN) non parallèle à D est une droite**, intersection du plan P avec le plan contenant M, N et la parallèle à D passant par M.



- D'après le théorème de Thalès, **l'image du milieu d'un segment est le milieu du segment image** et plus généralement les rapports de longueurs sont conservés.

- (P) **Les images de deux droites parallèles sont des droites parallèles.**

Preuve : notons (d) une droite parallèle à (MN), B un point de (d), A le symétrique de M par rapport à B et C l'intersection de (d) avec (AN) (A est dans le plan défini par (d) et (MN) donc (AN) et (d) sont coplanaires). D'après Thalès, C est le milieu de [AN].

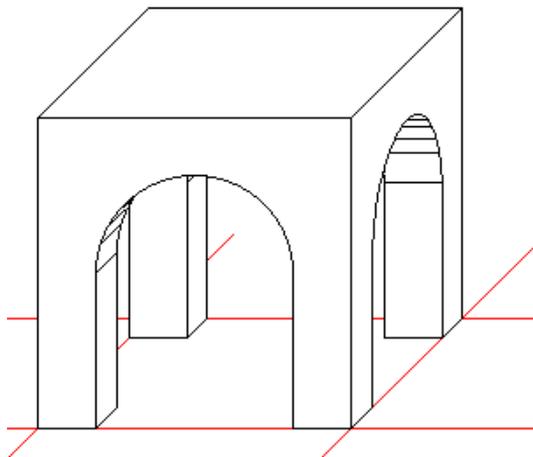
On en déduit que B et C ont pour images les milieux respectifs b et c des segments [am] et [an], images de [AM] et [AN].

Donc, d'après la réciproque de Thalès, $(bc)/(mn)$ (image de (MN)).

- **L'image d'un angle droit n'est en général pas un angle droit.**

En dessin technique et en architecture, une **perspective parallèle**, ou **perspective cylindrique** ou **perspective axonométrique** est une forme de représentation en dimension deux d'objets en dimension trois qui a pour objectif de conserver l'impression de volume ou de relief. Elle ne représente pas ce que l'œil voit réellement : en particulier les parallèles restent représentées par des parallèles et les distances ne sont pas réduites par l'éloignement.

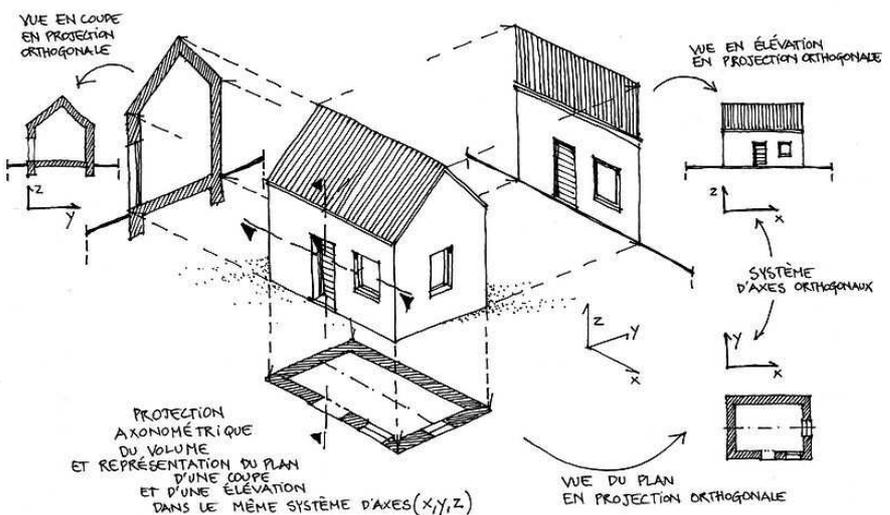
Parmi les perspectives parallèles les plus classiques, on peut citer la perspective cavalière et l'axonométrie orthogonale. Le terme d'axonométrie, ou perspective axonométrique (de axon axe et métrie mesure) désigne selon les auteurs, ou bien une perspective parallèle quelconque, ou bien une perspective orthogonale.



Perspective cavalière

Ce type de dessin est particulièrement simple à réaliser, que ce soit à la main ou par informatique (infographie, dessin assisté par ordinateur, synthèse d'image 3D). Il permet de donner une impression de relief tout en conservant les proportions dans une direction donnée. C'est pourquoi, c'est un outil utile en architecture et en dessin technique.

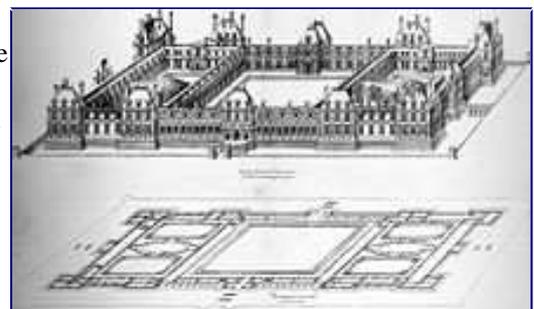
Le choix des directions des trois axes ainsi que les facteurs à opérer sur les longueurs des trois axes sont laissées au libre arbitre des dessinateurs.



Perspective axonométrique

Perspective parallèle et projection

En architecture, la perspective parallèle vient compléter les vues développées par Monge qui sont la vue de face et la vue de dessus de la géométrie descriptive. Longtemps, seules les vues géométrales étaient utilisées, la perspective conique mettant en scène le bâtiment dans son environnement était plutôt réservée au domaine de l'art et de la peinture. Fidèle à ce que l'œil voit, la perspective conique ne permettait pas d'indiquer clairement les rapport entre les diverses dimensions indispensables pour un architecte, elle est cependant utilisée par de grands noms comme Ledoux, , Lequeu, ou Viollet-le-Duc.



Jacques Ier Androuet du Cerceau, perspective cavalière des Tuileries.

Les premières représentations en perspective parallèle apparaissent au XVI^e siècle sous la plume d'Androuet du Cerceau qui construit des perspectives cavalières empiriques. Le vénitien Giovanni Battista Belluzzi exprime dans *Nuova inventione di fabricar fortezze di varie forme* publié en 1598, l'intérêt de l'axonométrie pour l'art des constructions militaires « parce que nous avons la nécessité de voir la chose entière, distincte et claire »⁷ et Jacques Perret de Chambéry l'utilise dans ses dessins techniques et précise que les différentes dimensions peut alors se prendre simplement au compas⁸, ce dernier utilise des perspectives militaires.

3. Représentation en perspective cavalière

Pour représenter un solide par une figure plane, on utilise souvent, en mathématiques, la perspective cavalière.

Définition : La perspective cavalière est une perspective parallèle de l'objet sur un plan parallèle à l'une de ses faces.

Règles de la perspective cavalière :

- La représentation d'une droite est une droite ou un point ;
- Les représentations de deux droites parallèles sont deux droites **parallèles** ;
- Il y a conservation du rapport des longueurs de deux segments **parallèles** ;
- Il y a conservation des milieux ;
- Les représentations des figures situées dans des plans vus de face, appelé **plans frontaux** sont en « vraie grandeur ».

Définitions :

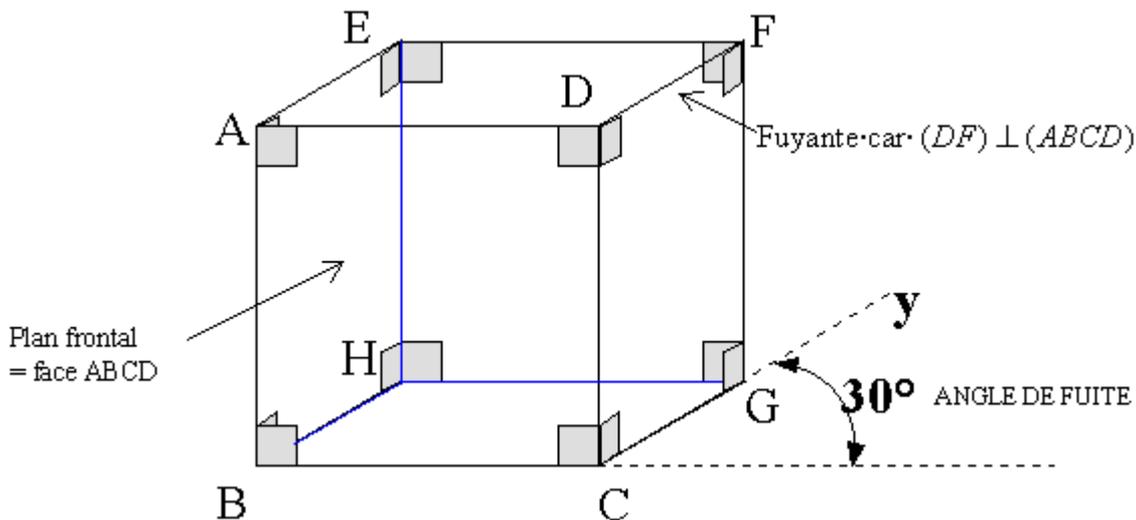
- On appelle **Fuyante toute droite orthogonale au plan frontal** ;
- L'angle constant que font les fuyantes avec une droite horizontale sur le plan de représentation s'appelle **l'angle de fuite** ;
- Soit A et B deux points d'une fuyante. On appelle coefficient de réduction le rapport entre la distance AB sur la représentation en perspective cavalière et la distance AB dans la réalité (en vraie grandeur). Autrement dit, si A' et B' sont les représentations de deux points A et B d'une fuyante, le nombre strictement positif k tel que $A'B' = kAB$ est le coefficient de réduction. Il vérifie $0 < k < 1$.

Exemple :

$AD = BC$ car $(AD) // (BC)$

$AE = DF$ car $(AE) // (DF)$

Mais $AB \neq AE$ sur la figure, alors qu'ils sont égaux dans la réalité :



Propriétés de conservation de la perspective cavalière :

La perspective cavalière conserve le parallélisme, le milieu, le centre de gravité.

Elle ne conserve ni l'orthogonalité (les angles droits), ni les distances, sauf dans le plan frontal.

Les perspectives cavalières les plus utilisées sont : angle de fuite = 30° et rapport $k = 0,5$

angle de fuite = 45° et rapport $k = \frac{1}{3}$.