

1. Notion de polygone régulier

Un polygone régulier est un polygone (figure fermée formée de segments de droite) dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles formés par des côtés adjacents sont égaux.

Exemples : parmi les triangles, polygone à trois côtés, le triangle régulier est le triangle équilatéral.
 parmi les quadrilatères, polygone à quatre côtés, le quadrilatère régulier est le carré.

Propriétés : Un polygone régulier est inscrit dans un cercle ; le centre du cercle est alors le centre du polygone. Pour construire un polygone régulier à n côtés (n est un entier supérieur ou égal à 3), on construit un cercle de centre O , un point du cercle et on utilise la rotation de centre O et d'angle $\frac{360}{n}^\circ$.

Le centre du polygone est un centre de symétrie. Il existe aussi des axes de symétrie.

Exemples : Pour le triangle équilatéral, le centre du cercle circonscrit au triangle est aussi le centre de gravité (point d'intersection des médianes), l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) et le centre du cercle inscrit (point d'intersection des bissectrices).

Pour le carré, le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des diagonales, qui est aussi le milieu de ces diagonales.

2. L'hexagone régulier :

C'est le polygone régulier à 6 côtés. Sa construction peut se faire avec le compas, par construction d'une rosace. On peut aussi le construire à l'aide de la rotation de centre le centre du cercle circonscrit et d'angle 60° .

Propriétés : Soit ABCDEF un hexagone régulier. Les triangles ACE et BDF sont équilatéraux.

Le triangle ABD est rectangle. Trouvez-en d'autres.

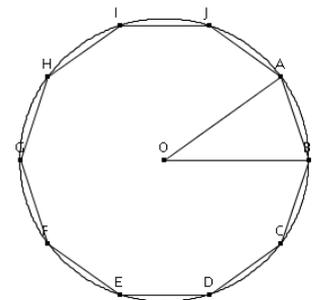
Le triangle ABC est isocèle d'angle principal 120° . Trouvez-en d'autres.

3. Le dodécagone régulier :

C'est le polygone régulier à 12 côtés. Il suffit de construire un hexagone régulier puis les médiatrices des côtés, qui coupe le cercle circonscrit aux autres sommet du dodécagone.

4. L'octogone régulier:

C'est le polygone régulier à 8 côtés. Il suffit de construire un carré puis les médiatrices des côtés, qui coupe le cercle circonscrit aux autres sommet de l'octogone.



5. Le décagone régulier:

Considérons un décagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et A et B deux sommets adjacents du décagone. Le triangle AOB est isocèle en O et l'angle $\widehat{AOB} = 36^\circ$.

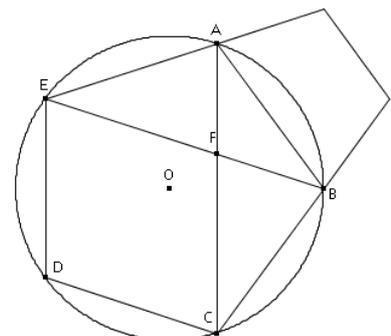
6. Le pentagone régulier:

On considère un pentagone régulier $ABCDE$. On note d la longueur de la diagonale de ce pentagone et c la longueur du côté. Soit F le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BE]$. Les points B, F et A sont trois sommets consécutifs d'un pentagone régulier.

Montrer que les droites (BE) et (CD) sont parallèles. En déduire la nature du quadrilatère $CDEF$.

Tous les pentagones réguliers étant semblables, montrer que $d/c = BA/BF = c/(d - c)$. En posant $x = d/c$, montrer que x est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Déterminer x .

On note ϕ ce nombre, appelé nombre d'or.



Autres méthodes de construction du pentagone régulier:

a) Une construction due à Euclide (troisième siècle avant J.C.) : On considère le triangle AOF rectangle et isocèle en O; G est le milieu de [AO]; le cercle de centre G et passant par F coupe la demi droite [AO) en C. Soient B et H les points d'intersection des cercles C_1 et C_2 de rayon OA et de centres respectifs A et C avec B dans le même demi-plan que F par rapport à (OA). Soient D et E les intersections respectives de la droite (AH) avec C_2 et de la droite (CH) avec C_1 . Montrer que ABCDE est un pentagone régulier.

b) On considère un cercle de centre O et de rayon OA. La droite perpendiculaire (OA) en O coupe le cercle en A'; le point B est le milieu de [OA']; le cercle de centre B et de rayon BA coupe (OA) en C à l'intérieur du cercle. Le cercle de centre A et de rayon AC coupe le cercle initial en A_1 et A_4 ; le côté du pentagone est AA_1 . Il n'y a plus qu'à reporter cette distance.

c) Une construction due à Richmond (1893): On considère un cercle de centre O, de rayon OA; la perpendiculaire à (OA) en O coupe le cercle en B; le point D est le milieu de [OB]. La bissectrice de l'angle \widehat{ODA} coupe [OA] en E. La perpendiculaire à (OA) en E coupe le cercle en A_1 et A_4 . Le côté du pentagone régulier est AA_1 . Il ne reste plus qu'à reporter cette distance.