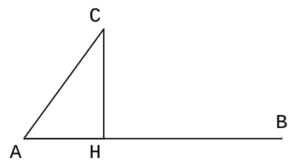
COURS PREMIÈRE STD2A LE PRODUIT SCALAIRE

1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs :

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconque du plan ; on considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

On définit alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :



$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens ;

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.

Si l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à θ, on a alors

$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos\theta$.

2. Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un est nul ou si l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à 90° ; dans ce cas, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Réciproquement, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors l'un des vecteurs est nul ou bien ils sont orthogonaux.

3. Autres écritures du produit scalaire :

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Dans le cas où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$; d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Dans un repère orthonormé : $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$; alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

4. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :

Pour tout réel k, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$(k\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

b) Egalités remarquables :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$;

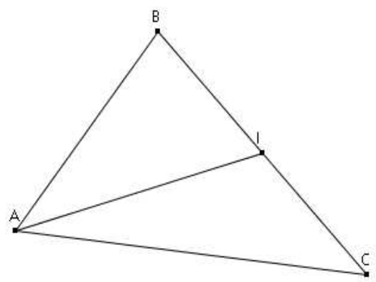
$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

c) Théorème de la médiane : On considère le triangle ABC et la médiane (AI) ; on a alors :

$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + 2\,BI^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$;

$AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - BI^2$.



d) Formule d'Al Kashi : Pour tout triangle ABC, on a

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times BC \cos(\widehat{ACB})$;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \cos(\widehat{ABC})$;

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$.

e) Formules des sinus : Pour tout triangle ABC non aplati, on a :

aire (ABC) = $\frac{1}{2}\,AC \times AB \sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}\,AB \times BC \sin(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\,AC \times BC \sin(\widehat{ACB})$ et

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{2\,aire(ABC)} .$$