A. Isométries du plan:

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs. Les transformations suivantes sont des isométries: la translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale ou réflexion, la rotation.

1. La translation:

Définition: On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

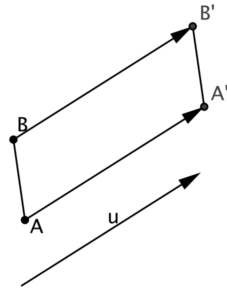
Notation: On note $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Propriétés: a) Point invariant: Si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul, aucun point n'est invariant. Si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points du plan sont invariants.

b) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$; c'est-à-dire que M est l'image de M' par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

c) Si $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que ABB'A' est un parallélogramme.

Ainsi A'B' = AB et (A'B') // (AB); ce qui signifie que la translation conserve les distances.



d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d);
l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles;
l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.
Ce qui signifie que la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

f) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, si $\vec{u}$ $(a; b)$ alors pour tout point M$(x; y)$, son image M'$(x'; y')$ par $t_{\vec{u}}$ vérifie: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2. La symétrie centrale:

Définition: On considère un point A du plan. La symétrie centrale de centre A est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que A est le milieu du segment [MM'].

On a alors $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$.

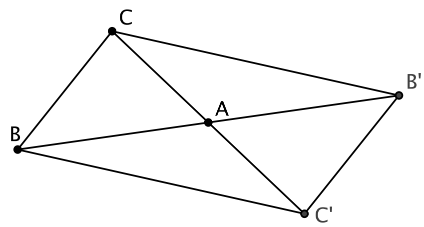
Notation: On note s_A la symétrie de centre A.

Propriétés: a) Point invariant: Le point A, centre de la symétrie, est l'unique point invariant.

b) Si $s_A(M) = M'$ alors $s_A(M') = M$.

c) Si $s_A(B) = B'$ et $s_A(C) = C'$, alors $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire que BCB'C' est un parallélogramme de centre A.

Ainsi B'C' = BC et (B'C')//(BC); ce qui signifie que la translation conserve les distances.



d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d);
l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

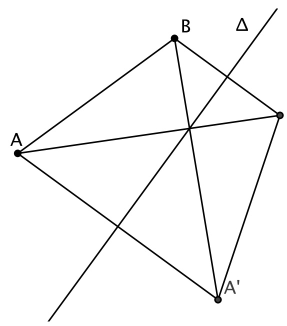
e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles;
l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

f) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, si A$(a; b)$ alors pour tout point M$(x; y)$, son image M'$(x'; y')$ par s_A vérifie: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

3. La symétrie axiale ou réflexion:

Définition: On considère une droite Δ du plan. La réflexion d'axe Δ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que Δ est la médiatrice de [MM'].

Notation: On note s_Δ la symétrie d'axe Δ.



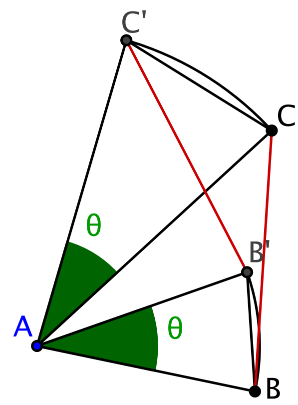
Propriétés: a) Point invariant: Les points de la droite Δ, axe de la symétrie, sont les points invariants.

b) Si $s_\Delta(M) = M'$ alors $s_\Delta(M') = M$.

c) Si $s_\Delta(A) = A'$ et $s_\Delta(B) = B'$, alors les droites (AB) et (A'B') se coupent en un point de la droite Δ. De plus, les droites (AA') et (BB') sont parallèles et A'B' = AB, c'est-à-dire que ABB'A' est un trapèze isocèle. Ce qui signifie que la réflexion conserve

les distances.
d) L'image d'une droite (d) est une droite (d'); si (d) est parallèle à Δ, alors (d') leur est parallèle; si (d) est perpendiculaire à Δ, alors (d') = (d).
e) l'image d'un cercle est un cercle de même rayon; si les deux cercles se coupent, alors les points d'intersection sont sur l'axe Δ.
f) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
g) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on note M(x; y) son image M'(x'; y') par s_Δ :
si Δ = (Ox) alors $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$. si Δ = (Oy) alors $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$. si Δ est la droite d'équation $y = x$ alors $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$.

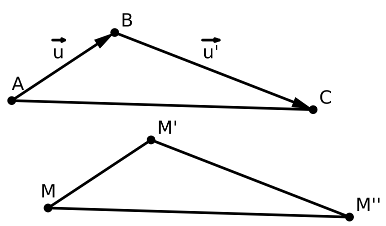
4. La rotation:
Définition: On considère un point A et un nombre réel positif θ. La rotation de centre A et d'angle θ degré est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que AM' = AM et $\widehat{MAM'} = \theta$.
Notation: On note rot(A; θ) la rotation de centre A et d'angle θ.



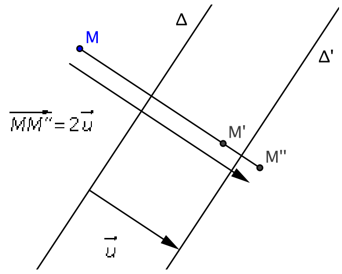
Propriétés: a) Point invariant: Le point A, centre de la rotation, est l'unique point invariant.
b) Si rot(A; θ)(B) = B' et rot(A; θ)(C) = C' , alors BC = B'C' et
($\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{B'C'}$) = θ; ce qui signifie que la rotation conserve les distances.
c) L'image d'une droite (d) est une droite (d') telle que l'angle formée entre les deux droites égale θ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
d) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
e) La rotation de centre A et d'angle 180° est la symétrie centrale de centre A, soit rot(A; 180°) = s_A.

B. Propriétés communes des transformations:
1. Propriétés communes aux isométries:
Conservation de l'alignement: L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre.
L'image d'une droite est une droite.
Conservation des distances: L'image d'un segment est un segment de même longueur.
L'image d'un cercle C est un cercle C' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle C, alors son image (d') est tangente à C'.
Conservation du parallélisme: Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
Conservation de l'orthogonalité : Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires .
Conservation des aires: L'image d'un triangle est un triangle de même aire.
Conservation des angles: L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.

C. Composée de deux transformations:
1. Composée de deux translations: On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ et les translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}'}$.
La composée des deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}'}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{u}\,'$.
Preuve : Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}\,' = \overrightarrow{BC}$.
Pour tout point M, soit M' l'image de M par la translation $t_{\vec{u}}$ et M'' l'image de M' par la translation de vecteur $t_{\vec{u}'}$.
On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'M''}$. On sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, donc M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{u}\,'$.

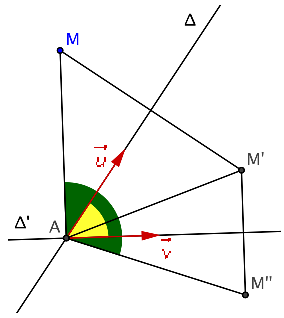


2. Composée de deux réflexions: On considère les droites Δ et Δ' et les réflexions s_Δ et $s_{\Delta'}$. Plusieurs cas se présentent suivant la position des droites Δ et Δ' :



Premier cas: Si Δ et Δ' sont parallèles , alors $s_\Delta \text{ o } s_{\Delta'} = t_{2\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est le vecteur de direction orthogonale aux droites Δ et Δ', de sens de Δ vers Δ' , et de norme la distance entre les deux droites. Si les deux droites son confondues, $\vec{u} = \vec{0}$ et $s_\Delta \text{ o } s_{\Delta'}$ = identité du plan.

De plus, $s_{\Delta'} \text{ o } s_\Delta = t_{-2\vec{u}}$ qui est la translation réciproque de $t_{2\vec{u}}$.

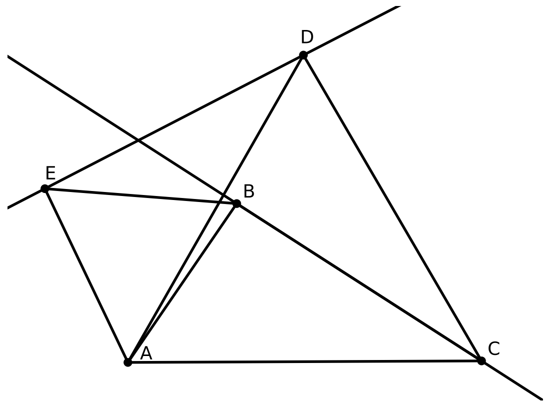


Deuxième cas: Si Δ et Δ' sont sécantes en A, alors $s_\Delta \text{ o } s_{\Delta'}$ = rot(A; θ) où $\theta = 2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ avec $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ vecteur directeur de Δ'.
Cas particulier: Si Δ et Δ' sont perpendiculaires en A, alors $s_\Delta \text{ o } s_{\Delta'}$ = rot(A; π) = s_A .

Réciproquement:
Toute translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles, telle que ces axes sont perpendiculaires à (AB) et la distance des deux axes est égale $\dfrac{AB}{2}$.
Toute rotation de centre A et d'angle θ peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes sécants en A et formant un angle $\dfrac{\theta}{2}$.
Toute symétrie centrale de centre A peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires en A.

- Ainsi, la composée de deux isométries revient à une composée d'un certain nombre de réflexions.

Exemple :
Soit ABC un triangle quelconque sur lequel on construit deux triangles équilatéraux ABE et ACD disposés comme sur la figure suivante :



Montrons que [ED] et [BC] ont la même longueur et que les droites (ED) et (BC) forment un angle de 60° .
Soit r la rotation de centre A d'angle 60° dans le sens direct.
ACD est un triangle équilatéral donc AC = AD et l'angle $\widehat{CAD}$ mesure 60°. L'image de C par la rotation r est donc D.
De même, AEB est un triangle équilatéral donc AE = AB et l'angle $\widehat{BAE}$ mesure 60° d'où l'image de B par r est E.
La rotation conserve les longueurs donc [BC] et son image [ED] ont la même longueur.
En outre, la rotation r transforme la droite (BC) en la droite (ED) et les deux droites forment un angle de 60° entre elles.