A. Mesures des angles orientés de vecteurs

1. **Angles orientés de vecteurs** : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.

On considère les points A et B de $\mathcal{C}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u} \,/\, \|\vec{u}\|$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v} \,/\, \|\vec{v}\|$.

Définition : L'angle de vecteurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$.

2. **Mesures des angles orientés :** Si α est une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, alors les autres mesures de cet angle sont les réels $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On écrit $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha + 2k\pi = \alpha\ [2\pi]$ (lire α modulo 2π).

Mesure principale : Tout angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ possède une mesure et une seule dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$; cette mesure est appelée la mesure principale de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

Exemples : déterminer les mesures principales de $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 7\pi/3$; $201\pi/6$; $-55\pi/4$.

Si $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \alpha$ dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, alors la mesure de l'angle géométrique est $|\alpha|$.

B. Propriétés des angles orientés

1. **Relation de Chasles :** pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + (\vec{v}\ ;\ \vec{w}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{w})$.
2. $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = -(\vec{v}\ ;\ \vec{u})\ [2\pi]$; $\quad(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v}) + \pi\ [2\pi]$; $\quad(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}) = (\vec{u}\ ;\ \vec{v})\ [2\pi]$.
3. **Colinéarité :** les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$ ou $\pi\ [2\pi]$.
4. **Orthogonalité :** les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \pi/2$ ou $-\pi/2\ [2\pi]$.
5. **Bissectrice :** (OJ) bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ si et seulement si $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OJ}) = (\overrightarrow{OJ}\ ;\ \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$.
6. **Angle inscrit :** Pour tout point M d'un cercle de centre O passant par A et B,

on a $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = 2 \times (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})\ [2\pi]$.

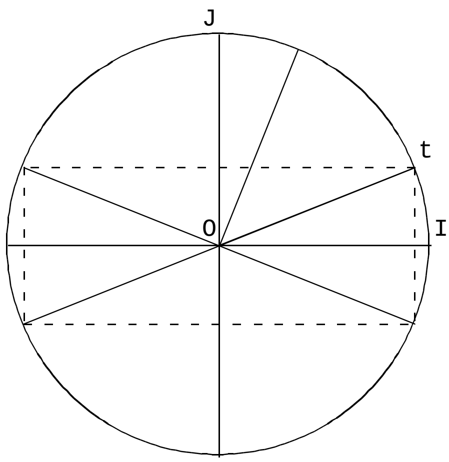
C. Lignes trigonométriques

1. Repère orthonormé direct :

On considère le repère $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ orthonormé ; on dit que $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ est direct si $(\vec{i}\ ,\ \vec{j}) = +\pi/2$ et indirect sinon.

On considère le repère $(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ orthonormé direct. Pour tout angle de vecteurs $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ de mesure α, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM}) = \alpha$. Les coordonnées de M sont $(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$.

Pour $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on définit $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



2. Angles associés :

Pour tout x on a :

$\cos(-x) = \cos x$; $\qquad \sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = \cos x$; $\qquad \sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$; $\qquad \sin(\pi/2 + x) = \cos x$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$; $\qquad \sin(\pi/2 - x) = \cos x$

D. Repérage polaire d'un point du plan

Pour tout point M du plan,

on définit l'angle $(\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM}) = \theta\ [2\pi]$ et la distance $OM = r$;

On définit les coordonnées polaires du point M par le couple $(r\ ;\ \theta)$. On a alors $\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\ \vec{i} + r\sin\theta\ \vec{j}$.

Si M a pour coordonnées cartésiennes (ou rectangulaire) $M(x\ ;\ y)$, alors on a les relations : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$;

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$.

E. Formules d'addition et de duplication des angles

$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$; $\qquad \sin(a + b) = \cos a\sin b + \sin a\cos b$;

$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$; $\qquad \sin(a - b) = \cos a\sin b - \sin a\cos b$;

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\qquad \sin(2a) = 2\cos a\sin a$.