A. Barycentre de deux points

1. Définition : Soient a et b deux réels tels que $a + b \neq 0$ et deux points A et B du plan. Il existe un unique point G de la droite (AB) tel que $a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. G est appelé le barycentre du système de points pondérés {(A, a) ;(B, b)}.

Notation : G = bar{(A,a) ;(B,b)}.

2. Caractérisation : Avec la condition $a + b \neq 0$, on a l'équivalence :

1) G = bar{(A,a) ;(B,b)} ;
2) Pour tout point M du plan, $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} = (a + b)\ \overrightarrow{MG}$;
3) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\ \overrightarrow{AB}$;
4) Il existe un point O tel que $\dfrac{a}{a+b}\ \overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b}\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG}$.

3. Construction : exemples : G = bar{(A, 2) ;(B, 3)} ;

K = bar{(A, 2) ;(B, -1)} :

propriété : si $ab > 0$, alors G ∈ [AB] et si $ab < 0$, alors G ∉ [AB].

4. Propriétés : a) Si $a = b$, G est appelé **l'isobarycentre** des points A et B ;
b) Pour k réel non nul, on a G = bar{(A, a) ;(B, b)} = G = bar{(A, ka) ; (B, kb)}.

B. Barycentre de trois points

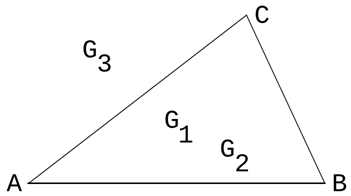
1. Définition : Soient a, b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$ et trois points A, B et C du plan. Il existe un unique point G du plan (ABC) tel que $a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} + c\ \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. G est appelé le barycentre du système de points pondérés {(A, a) ;(B, b) ;(C, c)}.

Notation : G = bar{(A, a) ;(B, b) ;(C, c)}.

2. Caractérisation : Avec la condition $a + b + c \neq 0$, on a l'équivalence :

1) G = bar{(A, a) ;(B, b) ;(C, c)} ;
2) Pour tout point M du plan, $a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC} = (a + b + c)\ \overrightarrow{MG}$;
3) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\ \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\ \overrightarrow{AC}$;
4) Il existe un point O tel que $\dfrac{a}{a+b+c}\ \overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b+c}\ \overrightarrow{OB} + \dfrac{c}{a+b+c}\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG}$.

3. Construction : exemples : Sur la figure ci-contre,
G_1 = bar{(A,1) ;(B,1) ;(C,1)} ; G_2 = bar{(A,2) ;(B,3) ;(C,1)} ;
G_3 = bar{(A,2) ;(B,-1) ;(C,3)} .



4. Propriétés :

a) Si $a = b = c$, G est appelé **l'isobarycentre** des points A, B et C ou centre de gravité du triangle ABC;
b) Pour k réel non nul, on a G = bar{(A, a) ;(B, b) ;(C, c)} = bar{(A, ka) ;(B, kb) ;(C, kc)}.
c) Associativité : si $a + b \neq 0$, soit S le barycentre de {(A, a) ;(B, b)} ; alors G = bar{(S, a+b) ;(C, c)}.
d) Dans l'espace, le barycentre de trois points A, B et C est dans le plan (ABC).
e) Coordonnées de G dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) :

$$x_G = \frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \quad , \quad y_G = \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \quad \text{et} \quad z_G = \frac{az_A+bz_B+cz_C}{a+b+c} .$$

5. Généralisation :
Pour n entier supérieur à 3, le barycentre de n points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_3), ..., (A_n, a_n) existe si la somme $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \neq 0$ et ce barycentre vérifie $a_1\ \overrightarrow{GA_1} + a_2\ \overrightarrow{GA_2} + a_3\ \overrightarrow{GA_3} + ... + a_n\ \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Exercices : a) Déterminer l'isobarycentre d'un quadrilatère quelconque ABCD.
b) Déterminer le barycentre du système (A, 1),(B, 2),(C, – 1),(D, 3).
c) Déterminer l'isobarycentre d'un tétraèdre ABCD.
d) ABCDEFGH est un cube ; déterminer l'isobarycentre de la pyramide ABCDE ; déterminer le barycentre de (A, 1),(C, 2),(F, – 1).