A. Dérivabilité en un point

1. Nombre dérivé :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a de I. On considère le point A(a ; $f(a)$) de la courbe C_f et le point M($a+h$; $f(a+h)$) pour h réel tel que $a+h$ est dans I. Pour h non nul, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition : Si la limite lorsque h tend vers 0, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, alors on dit que la fonction f est dérivable en a et la limite est appelé le nombre dérivé de f en a , et est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} .$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A ;
l'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

2. Approximation affine : Pour h proche de 0, $f(a+h)$ est proche de $f'(a)h + f(a)$; on dit que $f'(a)h + f(a)$ est une approximation affine de $f(a+h)$ lorsque h est proche de 0. Si l'on pose $x = a+h$, on a que $f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ lorsque x est proche de a .

Exemples : $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$; $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$; $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$ ...

Attention : Le nombre dérivé n'existe pas toujours : Les fonctions qui à associe $|x|$ et $\sqrt{x}$ n'ont pas de nombre dérivé en 0.

B. Fonction dérivée

1. Définition : Si la fonction f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on définit alors la fonction f' qui à x associe $f'(x)$; on l'appelle la fonction dérivée de f sur I.

Exemples : $(x^2)' = 2x$ sur $\mathbb{R}$; $(x^3)' = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$; pour n entier naturel, $(x^n)' = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$;

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$; $a, b \in \mathbb{R}$; $(ax+b)' = a$ sur $\mathbb{R}$; $\cos(x)' = -\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$; $\sin(x)' = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Opérations sur les fonctions dérivées : On considère des fonctions u et v dérivables sur $\mathcal{D}_{u'}$ et $\mathcal{D}_{v'}$:

$(ku)' = ku'$ sur $\mathcal{D}_{u'}$; $(u+v)' = u' + v'$ sur $\mathcal{D}_{u'} \cap \mathcal{D}_{v'}$; $(uv)' = u'v + uv'$ sur $\mathcal{D}_{u'} \cap \mathcal{D}_{v'}$;

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$ sur $\mathcal{D}_{u'} \cap \{x \text{ tel que } u(x) \neq 0\}$; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ sur $\mathcal{D}_{u'} \cap \mathcal{D}_{v'} \cap \{x \text{ tel que } v(x) \neq 0\}$; pour n entier naturel non nul, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ sur $\mathcal{D}_{u'}$; $(u(ax+b))' = a\,u'(ax+b)$ sur $\mathcal{D}_{u'}$.

C. Applications des dérivées

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. On a :

Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;
Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;
Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

2. Extremas d'une fonction : Soit $a \in$ I distinct des extrémités de I ; si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
Réciproquement : si $f'(a) = 0$ et f' change de signe en a , alors f admet un extremum local en a .

3. Monotonie : Si f est dérivable sur I et strictement monotone, alors pour tout c de f(I), il existe un unique k de I tel que $f(k) = c$.

Applications : f dérivable sur]a ; b[et strictement monotone, $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors il existe un unique α de]a ; b[tel que $f(\alpha) = 0$.

Exemples : existence d'une solution de $x^3 - 4x^2 + 7x - 1 = 0$;
existence d'une solution de l'équation $f(x) = 2$ où $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ (et approximation des solutions ?)