

L'étude globale d'une fonction

Le plan d'étude

- Préciser ou vérifier l'ensemble de définition D de la fonction.
- Étudier la parité de la fonction et en déduire les propriétés graphiques. Ceci permet de faire la suite de l'étude sur $D \cap \mathbb{R}^+$.
- Rechercher un axe de symétrie ou un centre de symétrie de la courbe qui permet de faire l'étude de la fonction sur un intervalle plus petit que D . *Voir le cours sur la parité et les symétries:*
http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_parite.pdf.
- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition D . *Voir le cours sur les limites:*
http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_limites.pdf.
- Calculer la dérivée de la fonction en précisant qu'elle est dérivable et sur quel ensemble elle l'est. Dans la plupart des cas, il s'agit de D . *Voir le cours sur la dérivation :*
http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_derivation.pdf.
- Étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.
- Dresser le tableau de variations de la fonction en rassemblant tous les éléments déterminés précédemment.
- Dessiner une représentation graphique de la fonction en y ajoutant les tangentes horizontales, les éventuelles asymptotes à la courbe.

Un exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Nous allons faire l'étude globale de cette fonction.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction f peut s'écrire $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.
2. Calculer $f(-2+x) + f(-2-x)$. Que peut-on en déduire au sujet de la courbe représentative (C) de f ? On décide de réduire l'étude de la fonction f à l'intervalle $]-2; +\infty[$.
3. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de $]-2; +\infty[$. Quelle conséquence graphique pour la courbe (C) peut-on en tirer ?
4. Déterminer la dérivée de la fonction f .
5. Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
6. Préciser les coordonnées des points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.
7. a) Montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
b) Étudier la position relative de (d) et de (C) sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
8. Le réel 2 possède-t-il un ou plusieurs antécédents ? Si oui, le(s) déterminer par le calcul.
9. Tracer la courbe (C) après avoir tracé ses asymptotes et toutes tangentes vues précédemment.

Corrigé : 1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ puisque le dénominateur doit être non nul. Sur cet

ensemble, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b+c}{x+2} = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$; et par identification des numérateurs,

on obtient $a = 1$; $2a + b = 3$; $2b + c = 3$, soit $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Donc $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+2}$.

2. $f(-2+x) + f(-2-x) = -2+x+1 + \frac{1}{x} + (-2-x)+1 + \frac{1}{-x} = -2 = 2 \times (-1)$. Ce qui signifie que le point de coordonnées $(-2; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

3. Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, donc par la somme des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, donc par la somme des limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite en -2 par valeurs supérieures : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x+1 = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

Limite en -2 par valeurs inférieures : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x+1 = 3$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

4. La fonction f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son ensemble de définition, et

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+2) - (x^2+3x+3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+7x+6 - x^2-3x-3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

5. Les variations de la fonction f sont données par le signe de la dérivée, donc par le signe du numérateur $x^2 + 4x + 3$, puisque le dénominateur est un carré. Signe de $x^2 + 4x + 3$:

$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$; l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$ a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-4+2}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-4-2}{2} = -3. \text{ Le signe de } x^2 + 4x + 3$$

est du signe de $1 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines -3 et -1 , et négatif pour les valeurs entre -3 et -1 .

D'où le tableau de variations:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

6. Les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses lorsque leur coefficient directeur est nul, soit lorsque la fonction dérivée de f est nulle, soit aux points d'abscisses -3 et 1 , qui correspondent à des extremums locaux de f .

Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C), il suffit de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) \text{ est nulle.}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0.$$

Donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C).

La position relative de (d) et de (C) est donnée par le signe

$$\text{de } f(x) - (x+1) = \frac{1}{x+2}. \text{ Ce quotient est strictement positif}$$

lorsque $x > -2$, et strictement négatif lorsque $x < -2$.

Donc la droite (d) est en-dessous de (C) sur $]-2; +\infty[$ et au-dessus sur $]-\infty; -2[$.

8. Le réel 2 possède des antécédents si l'équation $f(x) = 2$ a

$$\text{des solutions, soit } \frac{x^2+3x+3}{x+2} = 2,$$

$$\text{soit } x^2 + 3x + 3 = 2x + 4, \text{ soit } x^2 + x - 1 = 0.$$

Le discriminant $= 1 - 4 \times (-1) = 5 > 0$; l'équation a donc

$$\text{deux solutions : } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

