A. Notation

L'**ensemble de définition** de la fonction f (ensemble des valeurs de x tel que $f(x)$ existe) est noté D_f .

La **courbe représentative** de f (ensemble des points du plan de coordonnées (x ; $f(x)$) avec $x \in D_f$) est notée C_f ; son équation est $y = f(x)$.

Une **fonction** f définie sur un intervalle I : $I \longrightarrow IR : x \longrightarrow f(x)$. L'image de x par la fonction f est $f(x)$.

B . Variations de fonctions

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f définie sur un intervalle I de IR.

La fonction f est **croissante** sur I si elle conserve l'ordre des nombres sur I :

pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$; les images de a et b sont dans le même ordre que a et b.

La fonction f est **décroissante** sur I si elle inverse l'ordre des nombres sur I :

pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$; les images de a et b sont dans l'ordre contraire de a et b.

La fonction f est **strictement croissante** sur I si pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$;

La fonction f est **strictement décroissante** sur I si pour tous réels a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

2. Maximum ; minimum : Sur l'intervalle I, f admet un **maximum** $f(r)$ en r si pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(r)$.

Sur l'intervalle I, f admet un **minimum** $f(s)$ en s si pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(s)$.

3. Majorant, minorant, bornes : Sur l'intervalle I, f admet un **majorant** M si pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.

Sur l'intervalle I, f admet un **minorant** m si pour tout x de I, $f(x) \geqslant m$.

Si f admet un majorant et un minorant sur l'intervalle I, on dit que f est **bornée** sur I.

Propriété: Le maximum de f sur I est le plus petit majorant de f sur I; de même, le minimum de f sur I est le plus grand minorant de f sur I.

Attention: Un majorant n'est pas nécessairement un maximum; la fonction f peut ne pas atteindre ce majorant.

Exemples : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur IR ; $h(x) = x^2 - 2x + 2$ sur IR .

La fonction f admet 0 comme minimum; elle n'a pas de maximum, ni de majorant.

La fonction g admet 0 comme minorant et 1 comme maximum. Elle n'a pas de minimum.

La fonction h admet 1 comme minimum; elle n'a pas de maximum, ni de majorant.

C. Parité ; périodocité

- Pour tout x de D_f , si $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ alors f est une **fonction paire**.
- Pour tout x de D_f , si $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ alors f est une **fonction impaire**.

Exemples : $f(x) = 2x$ sur IR (impaire) ; $g(x) = x^2$ sur IR (paire) ; $h(x) = x^2 - 2x + 2$ sur IR (ni paire ni impaire).

Voir le cours plus complet sur la parité et les symétries : http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_parite.pdf .

- Soit T un nombre réel strictement positif ; on dit que f est **périodique de période T** (ou T-périodique) si pour tout x de D_f , $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

Exemples : les fonctions cosinus et sinus sont 2π - périodiques. La fonction tangente est π - périodique.

Pour tout x de IR, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Voir le cours plus complet sur la périodicité : http://dominique.frin.free.fr/premiere/crs1S_periodicite.pdf *et des animations sur les fonctions cosinus et sinus* : http://dominique.frin.free.fr/geogebra/trigonometrie.html .

D. Opérations sur les fonctions

On considère la fonction f définie sur D_f, et la fonction g définie sur D_g et le réel k.

On définie les fonctions $kf, f+g, fg, \dfrac{f}{g}$ et $f\circ g$ respectivement par :

$kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, et $f(g(x))$, définie respectivement sur:

D_f ; $D_f \cap D_g$; $D_f \cap D_g$; $D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$; $\{x \in D_g$ et $g(D_g) \subset D_f\}$.

- Si $k > 0$, alors kf et f ont même sens de variations; si $k < 0$, alors kf et f ont des sens de variations contraires .
- Si f et g ont le même sens de variations sur un intervalle I, alors $f+g$ a ce même sens de variations sur I, et $f\circ g$ ainsi que $g\circ f$ sont croissantes sur I.
- Si f et g ont des sens de variations contraires sur un intervalle I, alors $f\circ g$ et $g\circ f$ sont décroissantes sur I.

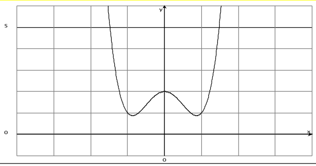
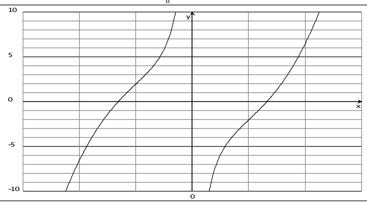
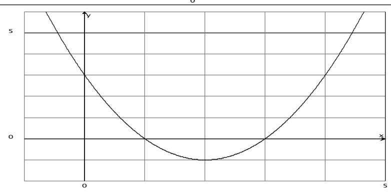
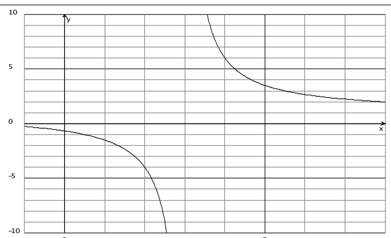
ATTENTION : la connaissance des variations de f et g ne permet pas de connaître les variations de fg et $\dfrac{f}{g}$.

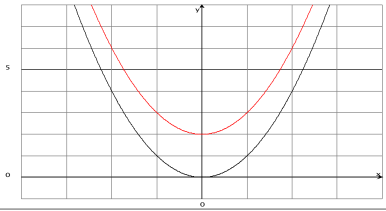
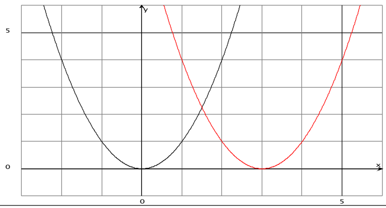
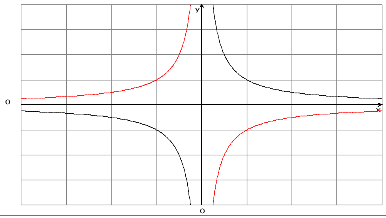
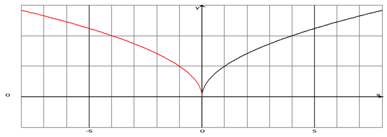
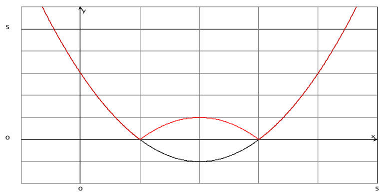
Exemple: $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = 2 - x$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$. Mais $fg(x) = -2x^2 + 5x - 2$; fg est croissante sur $]-\infty; -0,8]$ et décroissante sur $[-0,8; +\infty[$. $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$ est croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

Exercice : 1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + 2$. Déterminer $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$ et $g\circ g$, leur ensemble de définition et étudier les variations de chacune de ces fonctions sur leur ensemble de définitions.

2) $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 2x^2 + 1$. Déterminer $f+g$, fg , $5f$, $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{g}{f}$ et leur ensemble de définition.

E. Courbes et transformations

Propriété vérifiée par f	**Propriété géométrique - Exemple**	**Interprétation graphique**
Pour tout x de D_f, si $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ alors f est paire.	L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$	
Pour tout x de D_f, si $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire.	L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe. $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{x}$;	
Pour tout x de D_f, il existe un réel a tel que $a - x$ et $a + x \in D_f$ et $f(a-x) = f(a+x)$	La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe. $f(x) = x^2 - 4x + 3$; ici c'est la droite d'équation $x = 2$.	
Pour tout x de D_f, et il existe a et b réels, tels que $a - x$ et $a + x \in D_f$ et $f(a-x) + f(a+x) = 2b$	Le point de coordonnées $(a ;b)$ est centre de symétrie de la courbe. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$; ici c'est le point de coordonnées (3 ;1).	

Pour tout x de D_f , $f(x) = g(x) + k$	C_f est l'image de C_g par la translation de vecteur $k\ \vec{j}$. $f(x) = x^2 + 2$ $g(x) = x^2$	
Pour tout x de D_f , $f(x) = g(x + k)$	C_f est l'image de C_g par la translation de vecteur $-k\ \vec{i}$. $f(x) = (x - 3)^2$ $g(x) = x^2$	
Pour tout x de D_f , $f(x) = - g(x)$	C_f est l'image de C_g par la symétrie d'axe (Ox) . $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$	
Pour tout x de D_f , $f(x) = g(-x)$	C_f est l'image de C_g par la symétrie d'axe (Oy). $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{-x}$	
Pour tout x de D_f , $f(x) = \lvert g(x) \rvert$	C_f et C_g coïncident sur les intervalles où $f(x) > 0$, et C_f est l'image de C_g par symétrie par rapport à (Ox) sur les intervalles où $f(x) < 0$. $g(x) = x^2 - 4x + 3$	

Voir la page animations sur les transformations des fonctions :
http://dominique.frin.free.fr/geogebra/transforme_fct.html .