A. Fonction polynôme

Définition : On appelle fonction polynôme, ou polynôme, toute fonction f définie sur IR par $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, où les a_i sont des réels, appelés coefficients du polynôme f.

Notation : $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ (et qui se lit: « somme de $k = 0$ à $k = n$ de $a_k x^k$ »).

- Le plus grand entier n tel que a_n est non nul est le **degré** du polynôme noté deg(f).
- Si, pour tout x, $f(x) = 0$, alors tous les a_i sont nuls (un polynôme si et seulement si tous ses coefficients sont nuls).
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exemples de polynômes : $x^3 + 1$, $7x^4 - 8x^3 + x - 9$; $5/2$; $-1/2\, x + 3$.

B. Racines et factorisation

Soit f un polynôme et α un réel.

a) α est une racine de f signifie que $f(\alpha) = 0$; ce qui est équivalent à α est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

b) α est une racine de f équivaut à $f(x)$ se factorise par $(x - \alpha)$ équivaut à : il existe un polynôme g de degré deg(f) – 1 tel que $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

c) Le nombre de racines de f est inférieur ou égal à deg(f).

d) Exemples : $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$; $2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 1)$; $x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)$.

C. Polynôme de degré 2

On l'appelle aussi le trinôme du second degré, et on le note $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On peut le factoriser :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé le discriminant du polynôme. On a alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ appelée *forme canonique du trinôme*.

On peut alors résoudre **l'équation $ax^2 + bx + c = 0$** : Trois cas se présentent :

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$; alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation n'a pas de solution.

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$; alors l'équation devient $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ et la solution est $x = \frac{-b}{2a}$

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ se factorise (en utilisant: $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$) :

$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ et on obtient les solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans ce cas , on a la factorisation : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exercice : Résoudre les équations : $3x^2 - 2x - 1 = 0$; $2x^2 + 3x - 1 = 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

Signe du trinôme : Signe de $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x :

Si $\Delta < 0$		Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$ (on suppose $x_1 < x_2$)
x	$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$ $-b/(2a)$ $+\infty$	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	signe de a 0 signe de a	signe de a 0 signe de $-a$ 0 signe de a

Exercice : résoudre les inéquations : $3x^2 - 2x - 1 < 0$; $2x^2 + 3x - 1 > 0$; $x^2 - 6x + 9 \leq 0$; $3x^2 + 5x + 3 > 0$.

D. Fonction rationnelle

Définition : Soient f *et* g deux polynômes ; on appelle **fonction rationnelle** la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ définie sur l'ensemble où $g(x) \neq 0$.

- Si deg(f) = deg(g) = 1, la fonction rationnelle est appelée *fonction homographique*.

Exemples : $\frac{2x+3}{x-1}$; $\frac{4x-5}{7x+2}$.

- Si g se factorise par deux polynômes P et Q tel que $g(x) = P(x)Q(x)$, alors il existe des polynômes R, S et T tels que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{R(x)}{P(x)} + \frac{S(x)}{Q(x)} + T(x)$;

de plus, $\deg(R) \leq \deg(P) - 1$, $\deg(S) \leq \deg(Q) - 1$ et $\deg(T) = \max(\deg(f) - \deg(g) ; 0)$.

- Si $\deg(g) < \deg(f)$, alors il existe des polynômes R et S tels que $\frac{f(x)}{g(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$;

de plus, $\deg(R) \leq \deg(g) - 1$.

Exemples : $h(x) = \frac{2x^2-7x+7}{x-2} = 2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ définie sur IR\{ – 2 } ;

$h(x) = \frac{3x^3+4x^2-3x-2}{x^2-1} = 3x + 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ définie sur IR\{–1 ; 1}.

$h(x) = \frac{2x+7}{x-3} = 2 + \frac{13}{x-3}$ définie sur IR\{ – 3 } ;