A. Notation - Définition

Définition : une suite numérique (u_n) est une application de ℕ dans ℝ.
On note (u_n) la suite de nombres $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Le nombre u_n est le terme d'indice n (ou de rang n). u_o est le premier terme de la suite.
Exemples : $u_n = 3^n$ (formule explicite en fonction de n), $u_n = (1 + 5/100)^n$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ (formule récurrente : un terme de la suite s'écrit en fonction du précédent) ...

B. Les suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.
Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : S = n x (demi somme des termes extrêmes) .

Exemples : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$; $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2$.

C. Les suites géométriques

La suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé la raison de la suite.
Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : S = premier terme x $\dfrac{1-q^n}{1-q}$ si $q \neq 1$,

et S = n x premier terme si $q = 1$.

Exemple : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

D. Sens de variation d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est **strictement croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
La suite (u_n) est **strictement décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

Technique : a) on peut chercher à comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0, ou si tous les termes de la suite sont strictement positifs,

comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

b) Si $u_n = f(n)$, alors les variations de f sur [0 ; +∞ [donne les variations de (u_n).
Exemple : sens de variation d'une suite arithmétique :
si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

5. Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.
La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
Technique : pour montrer qu'une suite est majorée (ou minorée), et si $u_n = f(n)$, alors on cherche à majorer (ou à minorer) $f(x)$ sur [0 ; +∞ [.

6. Limite d'une suite

Définition : Une suite (u_n) est une suite **convergente** si la limite de la suite est un nombre réel fini, c'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ réel fini . Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente (sa limite est infinie ou n'existe pas).
Technique : si $u_n = f(n)$, alors la limite de la fonction f en +∞ est la limite de la suite u_n .
Théorème (de comparaison) : Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$ (théorème des gendarmes) .
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si les deux suites convergent, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$.