A. Isométries du plan:

Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs. Les transformations suivantes sont des isométries: la translation, la symétrie centrale, la symétrie axiale ou réflexion, la rotation.

1. La translation:

Définition: On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Notation: On note $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Propriétés: a) Point invariant: Si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul, aucun point n'est invariant. Si $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points sont invariants.

b) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$; c'est-à-dire que M est l'image de M' par la translation de vecteur $-\vec{u}$.

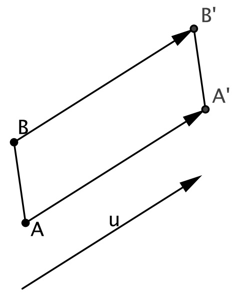
c) Si $t_{\vec{u}}(A) = A'$ et $t_{\vec{u}}(B) = B'$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire que ABB'A' est un parallélogramme.

Ainsi A'B' = AB et (A'B')//(AB); ce qui signifie que la translation conserve les distances.

d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d); l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

f) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, si $\vec{u}$ $(a; b)$ alors pour tout point M$(x; y)$, son image M'$(x'; y')$ par $t_{\vec{u}}$ vérifie: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.



2. La symétrie centrale:

Définition: On considère un point A du plan. La symétrie centrale de centre A est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que A est le milieu du segment [MM'].

On a alors $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$.

Notation: On note s_A la symétrie de centre A.

Propriétés: a) Point invariant: Le point A, centre de la symétrie, est l'unique point invariant.

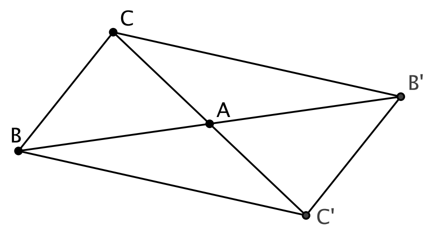
b) Si $s_A(M) = M'$ alors $s_A(M') = M$.

c) Si $s_A(B) = B'$ et $s_A(C) = C'$, alors $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, c'est-à-dire que BCB'C' est un parallélogramme de centre A. Ainsi B'C' = BC et (B'C')//(BC); ce qui signifie que la translation conserve les distances.

d) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d); l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

f) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, si A$(a; b)$ alors pour tout point M$(x; y)$, son image M'$(x'; y')$ par s_A vérifie: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.



3. La symétrie axiale ou réflexion:

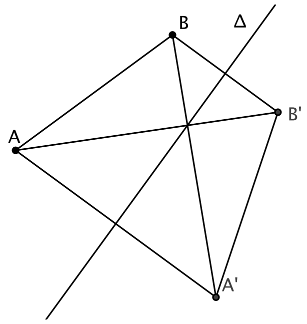
Définition: On considère une droite Δ du plan. La réflexion d'axe Δ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que Δ est la médiatrice de [MM'].

Notation: On note s_Δ la symétrie d'axe Δ.

Propriétés: a) Point invariant: Les points de la droite Δ, axe de la symétrie, sont les points invariants.

b) Si $s_\Delta(M) = M'$ alors $s_\Delta(M') = M$.

c) Si $s_\Delta(A) = A'$ et $s_\Delta(B) = B'$, alors les droites (AB) et (A'B') se coupent en un point de la droite Δ. De plus, les droites (AA') et (BB') sont parallèles et A'B' = AB, c'est-à-dire que ABB'A' est un trapèze isocèle. Ce qui signifie que la réflexion conserve les distances.



d) L'image d'une droite (d) est une droite (d'); si (d) est parallèle à Δ, alors (d') leur est parallèle; si si (d) est perpendiculaire à Δ, alors (d') = (d).

e) l'image d'un cercle est un cercle de même rayon; si les deux cercles se coupent, alors les points d'intersection sont sur l'axe Δ.

f) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

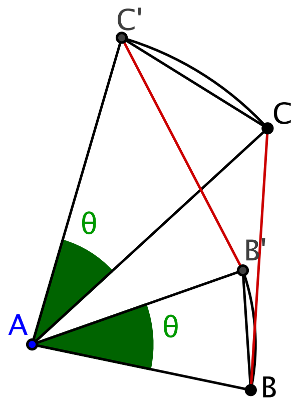
g) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on note M(x; y) son image M'(x'; y') par s_Δ :

si Δ = (Ox) alors $\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$. si Δ = (Oy) alors $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$. si Δ est la droite d'équation $y = x$ alors $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$.

4. La rotation:

Définition: On considère un point A et un nombre réel θ. La rotation de centre A et d'angle θ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que AM' = AM et $(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{AM'}) = \theta\ [2\pi]$.

Notation: On note rot(A; θ) la rotation de centre A et d'angle θ.



Propriétés: a) Point invariant: Le point A, centre de la rotation, est l'unique point invariant.

b) Si rot(A; θ)(B) = B' et rot(A; θ)(C) = C' , alors BC = B'C' et $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{B'C'}) = \theta$; ce qui signifie que la rotation conserve les distances.

c) L'image d'une droite (d) est une droite (d') telle que l'angle formée entre les deux droites égale θ; l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

d) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

e) rot(A; π) = s_A .

B. Une transformation qui n'est pas une isométrie:

L'homothétie:

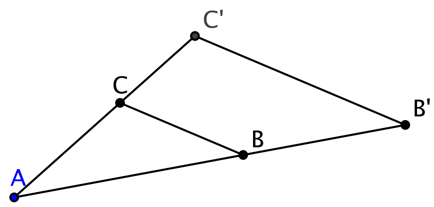
Définition: On considère un point A et un nombre réel k. L'homothétie de centre A et de rapport k est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$.

Notation: On note h(A; k) l'homothétie de centre A et de rapport k.

Propriétés: a) Point invariant: Si $k = 1$, tous les points du plan sont invariants. Si $k \neq 1$, le point A, centre de l'homothétie, est l'unique point invariant.

b) Si h(A; k)(B) = B' et h(A; k)(C) = C' , alors B'C' = $|k|$BC ; ce qui signifie que l'homothétie ne conserve les distances que si $|k| = 1$. Si $|k| \neq 1$, on parle de réduction ou d'agrandissement.

c) L'image d'une droite (d) est une droite (d') parallèle à (d). Si (d) passe par le centre A, alors (d') = (d).



d) L'image d'un cercle de rayon r est un cercle de rayon $|k|r$. Les tangentes communes aux deux cercles, si elles existent, passent par A.

e) L'image de deux droites parallèles sont deux droites parallèles; l'image de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires. Ce qui signifie que la rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

f) Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, si A(a; b) alors pour tout point M(x; y), son image M'(x'; y') par h(A; k) vérifie:

$$\begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \end{cases}.$$

g) L'image d'un triangle BCD par h(A; k) est le triangle B'C'D' et aire(B'C'D') = k^2 aire(BCD).

h) Si $k = -1$, h(A; k) = s_A .

C. Propriétés communes des transformations:

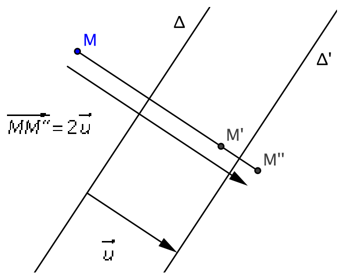
1. Propriétés communes aux isométries:

Conservation de l'alignement: L'image de trois points alignés sont trois points alignés dans le même ordre.
L'image d'une droite est une droite.
Conservation des distances: L'image d'un segment est un segment de même longueur.
L'image d'un cercle $\mathscr{C}$ est un cercle $\mathscr{C}$ ' de même rayon. Si la droite (d) est tangente au cercle $\mathscr{C}$, alors son image (d') est tangente à $\mathscr{C}$ '.
Conservation du parallélisme: Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
Conservation de l'orthogonalité : Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires .
Conservation du barycentre: L'image du barycentre de n points pondérés est le barycentre des images des n points affectés des mêmes coefficients.
Conservation des aires: L'image d'un triangle est un triangle de même aire.
Conservation des angles: L'image d'un angle géométrique est un angle de même mesure.
L'image d'un angle de vecteurs est un angle de vecteurs de même mesure pour la translation, la symétrie centrale et la rotation; par contre, l'image d'un angle de vecteurs par une réflexion est un angle de vecteurs de mesure opposée.

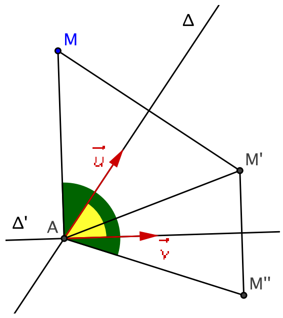
2. L'homothétie conserve aussi l'alignement, le barycentre, les angles.

D. Composée de deux transformations:

1. Composée de deux réflexions: On considère les droites Δ et Δ' et les réflexions s_Δ et $s_{\Delta'}$. Plusieurs cas se présentent suivant la position des droites Δ et Δ' :



Premier cas: Si Δ et Δ' sont parallèles , alors $s_\Delta \circ s_{\Delta'} = t_{2\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est le vecteur de direction orthogonale aux droites Δ et Δ', de sens de Δ vers Δ' , et de norme la distance entre les deux droites. Si les deux droites son confondues, $\vec{u} = \vec{0}$ et $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ = identité du plan.
De plus, $s_{\Delta'} \circ s_\Delta = t_{-2\vec{u}}$ qui est la translation réciproque de $t_{2\vec{u}}$.



Deuxième cas: Si Δ et Δ' sont sécantes en A, alors $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ = rot(A; θ) où $\theta = 2(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ avec $\vec{u}$ vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ vecteur directeur de Δ'.
Cas particulier: Si Δ et Δ' sont perpendiculaires en A, alors $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ = rot(A; π) = s_A .

Réciproquement:

Toute translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles, telle que ces axes sont perpendiculaire à (AB) et la distance des deux axes égale $\dfrac{AB}{2}$.

Toute rotation de centre A et d'angle θ peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes sécants en A et formant un angle $\dfrac{\theta}{2}$.

Toute symétrie centrale de centre A peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires en A.

- Ainsi, la composée de deux isométries revient à une composée d'un certain nombre de réflexions.