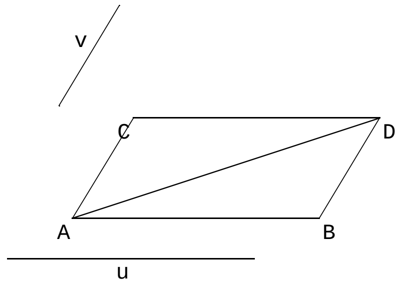
A. Définition et propriétés

On se place d'abord dans l'espace ; les propriétés suivantes sont communes aux vecteurs du plan et aux vecteurs de l'espace.

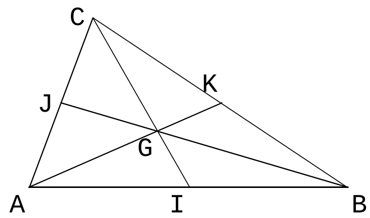


Définition : un vecteur est défini par une direction, un sens et une longueur (norme) : le vecteur $\vec{u}$ a la direction de la droite (AB), le sens de A vers B, et la longueur (ou norme du vecteur) est celle de AB.
la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ tel que , A, B, C, D sont les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$, alors ABDC est un parallélogramme.

Propriétés : a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à ABDC est un parallélogramme.
b) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ qui est le vecteur nul.
c) Relation de Chasles : pour tous points A, B, C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
d) Vecteur opposé : $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$; on a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
e) Pour k, nombre réel, on définit le vecteur $k\,\vec{u}$ par le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de norme $|k|$ fois celle de $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé si $k < 0$.
f) Vecteurs colinéaires : deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Conséquences : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à : les points A, B et C sont alignés.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

g) Points particuliers : Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) I milieu du segment [AB] ; 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; 3) $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{AB}$; 4) pour tout point M , on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.



Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) G est le centre de gravité du triangle ABC ;
2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
3) pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

h) Caractérisation d'une droite : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur ; l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\vec{u}$ où k est un réel, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

i) Vecteurs coplanaires : Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$ est le plan de l'espace de repère (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) ; c'est le plan (ABC) tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Définition : Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace, O un point quelconque, et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$. Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires si les points O, A, B et C sont dans un même plan.

Théorème : Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace tel que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires . Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{k} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j}$.

B. Les vecteurs dans une base :

Dans le plan, une base est constituée de deux vecteurs non colinéaires .
Dans l'espace, une base est constituée de trois vecteurs non colinéaires et non coplanaires.
Repère de l'espace : Trois vecteurs non coplanaires de l'espace forment une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
Tout vecteur du plan ou de l'espace s'écrit en fonction des vecteurs de la base : soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) une base de l'espace ; tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$; les nombres réels a, b, c sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), noté $(a\ ;b\ ;c)$.
Si O est un point de l'espace, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ une base de l'espace, alors (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) forme un repère de l'espace.
La base est orthogonale si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux ; et la base est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous de norme 1.

Pour tout point M de l'espace il existe des réels x, y, z tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.
x, y, z sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et les coordonnées du point M.

Notations : $\overrightarrow{OM}$ $(x\,;y\,;z)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Calculs dans un repère :

$\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$;

I milieu du segment [AB] : I $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles :
dans le plan, $\vec{u}\,(a\,;\,b)$ et $\vec{v}\,(a'\,;\,b')$ sont colinéaires si et seulement si $ab' - ba' = 0$.
dans l'espace, $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ et $\vec{v}\,(a'\,;\,b'\,;\,c')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $a'=ka$, $b'=kb$, $c'=kc$; ou si $ab' - ba' = 0$, $bc' - cb' = 0$ et $ac' - ca' = 0$.

Dans un repère orthonormal : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$;

C. Les configurations

configuration	*aspect vectoriel*	*aspect analytique*
ABCD est un parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	$x_B - x_A = x_C - x_D$ $y_B - y_A = y_C - y_D$ $z_B - z_A = z_C - z_D$
I est le milieu du segment [AB]	pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.	$x_I = (x_A + x_B)/2$ $y_I = (y_A + y_B)/2$ $z_I = (z_A + z_B)/2$
G centre de gravité du triangle ABC	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$	$x_G = (x_A + x_B + x_C)/3$ $y_G = (y_A + y_B + y_C)/3$ $z_G = (z_A + z_B + z_C)/3$
Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si a) 2 droites sont sécantes b) 2 droites sont parallèles	a) 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ formés avec les points A, B, C, D sont coplanaires ssi il existe des réels non nuls a, b, c tels que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$	$ax+bx'+cx'' = 0$ $ay+by'+cy'' = 0$ $az+bz'+cz'' = 0$
Droites (AB) et (CD) parallèles	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ssi il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$	Dans le plan, $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$
Alignement de trois points A, B et C	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$	Dans le plan, $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$

Si le repère est orthonormé :

Droites (AB) et (CD) perpendiculaires	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs orthogonaux	$\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ sont orthogonaux ssi $xx' + yy' + zz' = 0$
Distance de A à B	Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$	AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$