Exercice 2 : On lance deux dés cubiques équilibrés.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus, Y la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence entre les résultats et Z la variable aléatoire égale à la plus grande valeur des résultats.
1. Les lois de probabilité de X, de Y et de Z :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y_i	0	1	2	3	4	5
$p(Y = y_i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

z_i	1	2	3	4	5	6
$p(Z = z_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

On vérifie dans chaque cas que la somme des probabilités est bien égale à 1.

2. Calcul des probabilités suivantes :
$p(X \geq 10) = \frac{6}{36}$; $p(X < 7) = \frac{15}{36}$; $p(Y \geq 3) = \frac{12}{36}$; $p(Y < 2) = \frac{16}{36}$; $p(Z \geq 5) = \frac{20}{36}$.
3. Calcul de leur espérance mathématique et leur écart-type :
$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i = \frac{252}{36} = 7$; $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2 = \frac{350}{6}$ et $\sigma(X) \simeq 2{,}42$.
$E(Y) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i y_i = \frac{70}{36}$; $V(Y) = \frac{665}{324} \simeq 2{,}052$ et $\sigma(Y) \simeq 1{,}43$.
$E(Z) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i z_i = 40{,}25$; $V(Z) \simeq 1{,}972$ et $\sigma(Z) \simeq 1{,}404$.

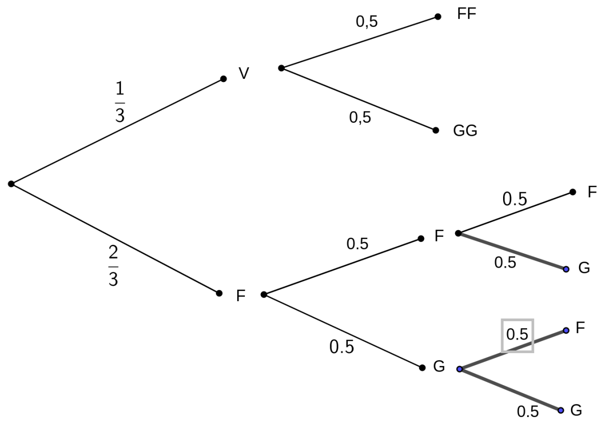
Exercice 3 : A une loterie, 10000 billets sont mis en vente. Il y a 5 lots gagnants de 1000 €, 10 de 500 €, 15 autres de 200 € et 20 de 100 €. Tout est vendu. Un billet coûte 5 €.
1. On achète un seul billet; on peut espérer gagner 1000 – 5 = 995 €.
2. Le gain dépend du tirage, c'est une variable aléatoire X. La loi de probabilité de X :
X prend ses valeurs dans { – 5 ; 95 ; 195 ; 495 ; 995}.

x_i	– 5	95	195	495	995
$p(X = x_i)$	$\frac{950}{10000}$	$\frac{20}{10000}$	$\frac{15}{10000}$	$\frac{10}{10000}$	$\frac{5}{10000}$

3. La probabilité $p(X \geq 100) = \frac{15+10+5}{10000} = 0{,}0003$.
4. Ce que l'on peut espérer gagner correspond à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, soit E(X) = 1 €.

Exercice 4 : La naissance de jumeaux se produit dans 3% des grossesses. Ces jumeaux peuvent être de vrais jumeaux dans 1/3 des cas, ou de faux jumeaux dans 2/3 des cas. De vrais jumeaux sont de même sexe, et il y a équiprobabilité entre deux filles et deux garçons. Pour de faux jumeaux, le sexe de chacun est indépendant de l'autre, et il y a équiprobabilité entre fille et garçon.

On choisit au hasard une femme ayant une grossesse avec des jumeaux. La situation est décrite par l'arbre ci-contre :



On note X le nombre de filles à la naissance.

X prend ses valeurs dans $\{0 ; 1 ; 2\}$.

$p(X = 0) = p(V \cap GG) + p(F \cap G \cap G) = \frac{1}{3} \times 0{,}5 + \frac{2}{3} \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \frac{1}{3}$.

$p(X = 1) = p(F \cap G \cap F) + p(F \cap F \cap G) = \frac{2}{3} \times 0{,}5 \times 0{,}5 + \frac{2}{3} \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \frac{1}{3}$.

$p(X = 2) = p(V \cap FF) + p(F \cap F \cap F) = \frac{1}{3} \times 0{,}5 + \frac{2}{3} \times 0{,}5 \times 0{,}5 = \frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On obtient une situation d'équiprobabilité.

L'espérance mathématique de X est $E(X) = 1$.

Son écart-type est $\sigma(X) \simeq 1{,}29$.

Exercice 5 : Les trois commerciaux d'une entreprise ont respectivement une probabilité de 0,1 ; 0,2 ; 0,3 de conclure un contrat chaque jour ouvrable.

La probabilité, pour chacun d'eux, de signer plusieurs contrats est nulle.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de contrats signés pour l'entreprise un jour donné.

1. X prend ses valeurs dans $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$. La loi de X :

$p(X = 0) = 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}504$;

$p(X = 1) = 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}1 \times 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}398$;

$p(X = 2) = 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}3 + 0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}1 \times 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}092$;

$p(X = 3) = 0{,}1 \times 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}006$;

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,504	0,398	0,092	0,006

2. La probabilité de signer au moins un contrat est $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 0{,}994$.
3. La probabilité $p(X < 2) = 0{,}504 + 0{,}398 = 0{,}902$.
4. L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0{,}6$ et son écart-type $\sigma(X) \simeq 0{,}678$.

Exercice 6 : Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :

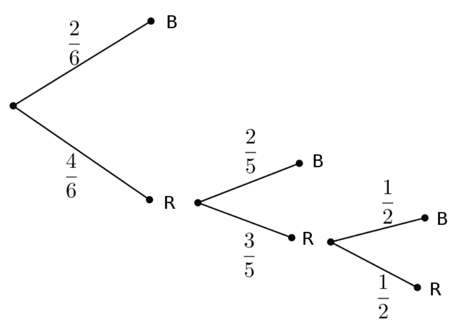
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

• Si le jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.

• Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.

• Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

L'arbre de probabilités :



1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est égale à $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés par Luc.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont $\{1 ; 2 ; 3\}$.

La loi de probabilités de X :

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$

L'espérance mathématique de X est égale à

$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{31}{15}$.