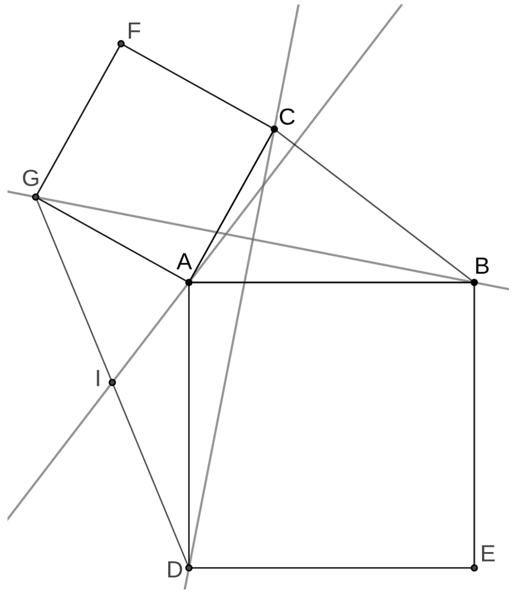
EXERCICE 1 :
Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(2 ; 1) et B(– 3 ; 3). Déterminer une équation de la droite (AB), une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par A, une équation de la médiatrice de [AB], une équation du cercle de centre A et de rayon AB, une équation du cercle de diamètre [AB].

EXERCICE 2 :
Dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(1 ; – 2), B(– 3 ; 0) et C(1 ; 4).
1. Déterminer une équation des hauteurs, des médiatrices et des médianes du triangle ABC.
2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit Ω, de l'orthocentre H et du centre de gravité G du triangle ABC.
3. Montrer que les points Ω, H et G sont alignés, et montrer que GH = 2GΩ. La droite (GH) est appelée la droite d'Euler.

EXERCICE 3 :
On considère le carré ABCD et M un point du segment [AC]. La perpendiculaire à (AD) passant par M coupe (AD) en P et la perpendiculaire à (DC) passant par M coupe (DC) en Q.
Que peut-on dire des droites (BQ) et (CP) ?

EXERCICE 4 :
On considère un triangle ABC quelconque et les carrés ACFG et ABED extérieurs au triangle ABC.
Le point I est le milieu de [DG] (figure ci-contre).
1. Que peut-on dire des droites (CD) et (BG) ? Justifier la réponse.
2. Que peut-on dire des droites (AI) et (BC) ? Justifier la réponse.
3. Montrer de plus que BC = 2AI.



EXERCICE 5 :
On considère le triangle ABC équilatéral direct de côté 6 cm, les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC] et G est le centre de gravité de ABC.
On se place dans le repère (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$).
1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{CI}$.
b) En déduire la mesure exacte de l'angle $\widehat{IGJ}$.
c) Déterminer une équation de la droite (IJ) et une équation de la droite (BG).
d) En déduire les coordonnées du point D intersection des droites (IJ) et (BG).
2. On considère le réel k et les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = k\,\overrightarrow{CB}$.
a) Faire une figure avec $k = \dfrac{1}{3}$.
Dans la suite de l'exercice, le réel k est quelconque.
b) Montrer que les coordonnées de N sont N(k; $1 - k$).
c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM}$ en fonction de k.
3. En déduire les valeurs de k pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires.
4. Déterminer la valeur de k pour laquelle les droites (AN) et (CM) sont parallèles.

EXERCICE 6 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Déterminer une équation cartésienne du cercle défini par :
a) le cercle de centre Ω(1 ; – 7) et de rayon 5.
b) le cercle de centre Ω(– 2 ; – 1) et passant par le point A(1 ; 3).
c) le cercle de diamètre [AB] avec A(3 ; 5) et B(– 8 ; 6).
d) le cercle de centre Ω(– 1 ; – 3) et de rayon 24.
e) le cercle de centre Ω(0,5 ; – 0,5) et passant par le point O(0 ; 0).
f) le cercle de diamètre [AB] avec A(– 1 ; 2,5) et B(– 2 ; 1,5).

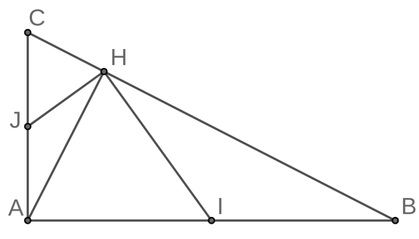
EXERCICE 7 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle (C) au point A de ce cercle dans les cas suivants :
a) le cercle de centre $\Omega(-2\ ;-1)$ et passant par le point A(1 ; 3).
b) le cercle de diamètre [AB] avec A(3 ; 5) et B(− 8 ; 6).
c) le cercle de diamètre [AB] avec A(− 1 ; 2,5) et B(− 2 ; 1,5).

EXERCICE 8 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui, tracer le cercle.
a) $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$.
b) $x^2 + 5x + y^2 - 10y + 7 = 0$.
c) $x^2 - x + y^2 + 2y + 3 = 0$.
d) $x^2 + 8x + y^2 + 6y = 0$.
e) $x^2 - 7x + y^2 - 9y + 32 = 0$.
f) $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

EXERCICE 9 : Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormé, on considère les points A et B définis par $\overrightarrow{OA} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i}$.
a) Déterminer une équation du cercle (C) de centre A et de rayon 2.
b) Soit E un point de (C) d'abscisse égale à – 2; déterminer une équation de la médiatrice de [OB] et une équation de la médiatrice de [OE]. En déduire les coordonnées du point W centre du cercle (C') circonscrit au triangle OBE.
c) Déterminer une équation de ce cercle (C').
d) Montrer que la droite (AE) est tangente au cercle (C').
e) Montrer que $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = AW^2 - EW^2 = AE^2$ (on pourra utiliser le milieu de [OB]).

EXERCICE 10 : Dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormé, on considère les points A (1 ; 2), B(− 4 ; 2) et C(0 ; − 2) .
a) Montrer que les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.
b) Déterminer une équation de la médiatrice de [AB] et une équation de la médiatrice de [AC].
c) En déduire les coordonnées du point W centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
Préciser le rayon de ce cercle.
d) L'axe des ordonnées coupe le cercle en D et E. Déterminer les coordonnées du point E.
e) Montrer que la droite (d) d'équation $y + 5x - 7 = 0$ est tangente au cercle (C) en A.
f) Le point F est le point d'intersection des droites (AB) et (CD).
Montrer que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = EW^2 - AW^2$.

EXERCICE 11 : ABC est un triangle rectangle en A, I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC], et H est le projeté orthogonal de A sur [BC].
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont orthogonales par 4 méthodes différentes :



Méthode 1 : Montrer que $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} = -AH^2$. En déduire que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$; conclure.
Méthode 2 : On considère un repère orthonormé (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$), d'axes (AB) et (AC),
et on pose B(b ; 0) et C(0 ; c) . Calculer les coordonnées des points I, J et H en fonction de b et c .
En déduire que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$; conclure.
Méthode 3 : Justifier que le cercle circonscrit au triangle AIJ passe par le milieu K de [BC] et par H ; conclure.
Méthode 4 : Exprimer les longueurs HI, HJ et IJ en fonction des longueurs du triangle ABC ; conclure.

EXERCICE 12: On considère l'hyperbole (H) d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et trois points A, B et C sur l'hyperbole d'abscisses respectives a, b et c. Le but de l'exercice est de montrer que l'orthocentre du triangle ABC est aussi sur l'hyperbole (H).
a) Déterminer une équation de la droite (d), hauteur issue de A dans le triangle ABC.
b) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de cette hauteur (d) avec l'hyperbole (H).
c) Montrer que ce point K appartient à une autre hauteur.
d) En déduire que l'orthocentre du triangle ABC est aussi sur l'hyperbole (H).