Exercice 1 : Calculs algébriques

a) $e^2(e^4+e^5) = e^6 + e^7$;   b) $e^{-3}(e^2\times e^4)^3 = e^9$;   c) $\dfrac{e^2\times e^5}{e^{-1}\times e^3} = e^5$;   d) $\sqrt{e^4\times e^6}\times(e^{-1})^2 = e^3$;

e) $e^{2x+3}\times e^{4x-5} = e^{6x-2}$;   f) $\dfrac{e}{e+1} + \dfrac{e}{1+e^{-1}} = e$;   g) $\dfrac{e^{2x}\times e^{x-5}}{e^{-x}} = e^{4x-5}$;

h) $\dfrac{e^{x^2}\times e^{x+1}}{e^{x^2-1}} = e^{x+2}$;   i) $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2 = 4.$

Exercice 2 : Résolution d'équations et d'inéquations :

a) Résoudre les équations suivantes :

a) $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$;   b) $e^{2x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -0{,}5$;   c) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$; on pose $X = e^x$;
l'équation devient $X^2 + X - 2 = 0$, équation du second degré dont les solutions sont 1 et -2 ;
d'où $e^x = 1$ et $e^x = -2$ (impossible) ; donc la solution est 0 ;
d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ on pose $X = e^x$; l'équation devient $X^2 - 2X + 1 = 0$, équation du second degré dont la solution est 1 ; d'où $e^x = 1$ donc la solution est 0 ;
e) $e^{2x} + 2e^x + 1 = 0$; on pose $X = e^x$; l'équation devient $X^2 + 2X + 1 = 0$, équation du second degré dont la solution est -1 ; d'où $e^x = -1$ impossible donc pas de solution.

b) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$;   b) $e^{2x+1} \geq 1 \Leftrightarrow x \in [-0{,}5\ ;+\infty[$;   c) $e^{-x+1} \leq 1 \Leftrightarrow x \in [1\ ;+\infty[$;
d) $e^{3x-4} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow x \in [0{,}8\ ;+\infty[$;   e) $e^x - e^{-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$.

Exercice 3 : Étude de fonctions :

Étude des fonctions suivantes ; toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$; $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+1)(-e^{-x}) = (-2x+1)e^{-x}$ qui est du signe de $(-2x+1)$ puisque $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$;
$-2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$; d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$2e^{-0{,}5}$	$\searrow$	

b) $f(x) = e^x - e^{-x}$; $f'(x) = e^x - (-e^{-x}) = e^x + e^{-x}$ qui est strictement positif ; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

c) $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x+2)-(e^x+1)e^x}{(e^x+2)^2} = \dfrac{e^x}{(e^x+2)^2}$ qui est strictement positif ; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

d) $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} =$
$\dfrac{(e^{2x}+e^0+e^0+e^{-2x})-(e^{2x}-e^0-e^0+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ qui est strictement positif ; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

e) $f(x) = e^{2x} - e^x - 6$; $f'(x) = 2e^{2x} - e^x = e^x(2e^x - 1)$ qui est du signe de $2e^x - 1$ puisque $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$; $2e^x - 1 > 0$ équivaut à $e^x > 0{,}5$ équivaut à $x > \ln(0{,}5)$; d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\ln(0{,}5)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-6{,}25$	↗

f) $f(x) = e^x - x$; $f'(x) = e^x - 1$;
$e^x - 1 > 0$ équivaut à $e^x > 1$ équivaut à $x > 0$; d'où le tableau de variations :

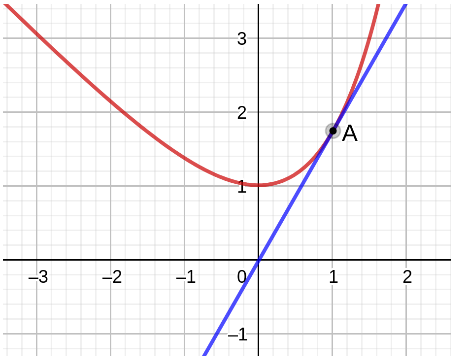
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

g) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est strictement positif ; d'où le tableau de variations :

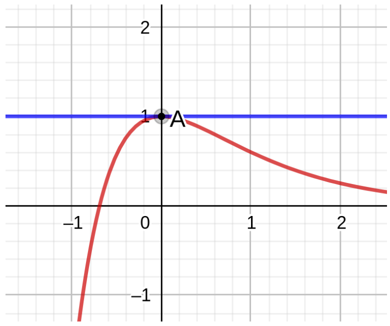
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	↗	

Exercice 4 : Représentations graphiques :

1. La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = e^x - x$ admet-elle une tangente passant par l'origine du repère ? L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en un point d'abscisse a est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$;
cette tangente passe par l'origine du repère si et seulement si
$-af'(a) + f(a) = 0$ (ordonnées à l'origine = 0) ; soit $af'(a) = f(a)$
équivaut à $a(e^a - 1) = e^a - a \Leftrightarrow ae^a - a = e^a - a \Leftrightarrow ae^a = e^a \Leftrightarrow a = 1$
puisque puisque $e^a > 0$ sur $\mathbb{R}$;
Cette équation est $y = (e - 1)(x - 1) + e - 1 = (e - 1)x$. Figure ci-contre :



2. On considère les réels a et b, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ae^{-x} + be^{-2x}$.
La dérivée de cette fonction est $f'(x) = -ae^{-x} - 2be^{-2x}$.
La courbe C représentative de f passe par le point A(0 ; 1) si $f(0) = 1$,
soit $ae^0 + be^0 = a + b = 1$;
La courbe C admet une tangente horizontale en ce point si $f'(0) = 0$,
soit $-ae^0 - 2be^0 = -a - 2b = 0$;
On résout le système d'équations : $\begin{cases} a+b=1 \\ -a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b+b=1 \\ a=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b=1 \\ a=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases}$. D'où $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$. Figure ci-contre :



3. On considère les réels a et b, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = a + be^{-x}$. La courbe C représentative de f passe par le point A(0 ; 3) si
$f(0) = 3$, soit $a + be^0 = a + b = 3$;
La courbe C admet une tangente en ce point de coefficient directeur égal à 1 si
$f'(0) = 1$, soit $-be^0 = 1$, soit $b = -1$; d'où $a - 1 = 3$, soit $a = 4$.
D'où $f(x) = 4 - e^{-x}$. Figure ci-contre :