<u>Exercice 5</u> : On considère un réel k et la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$. La courbe C_k est la courbe représentative de f_k dans un repère du plan.

1. La fonction dérivée de la fonction f_k est $f_k'(x) = 1e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (1 - x - k)e^{-x}$. Cette dérivée est du signe de $1 - x - k$ puisque $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$; $1 - x - k = 0$ équivaut à $x = 1 - k$, d'où le tableau de variations de la fonction f_k :

x	$-\infty$		$1 - k$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	

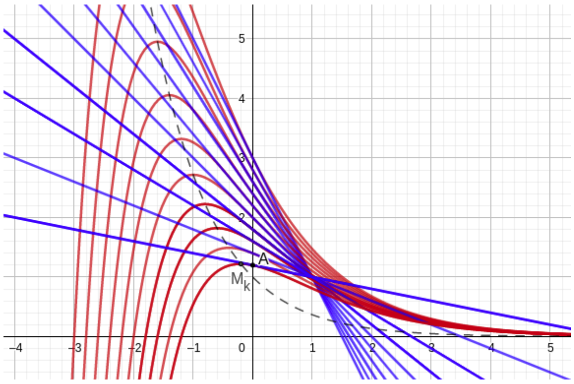
2. D'après le tableau de variations, pour tout réel k, la fonction f_k admet un unique maximum, noté $y_k = e^{k-1}$.

3. Soit M_k le point de C_k de coordonnées $(x_k ; y_k) = (1 - k ; e^{k-1})$.
Le point M_k appartient à la courbe C d'équation $y = e^{-x}$ car $e^{-x_k} = e^{-(1-k)} = e^{k-1} = y_k$.

4. Une équation de la tangente T_k à la courbe C_k en $x = 0$ est $y = (1 - 0 - k)e^0 (x - 0) + (0 + k)e^0 = (1 - k)x + k$.

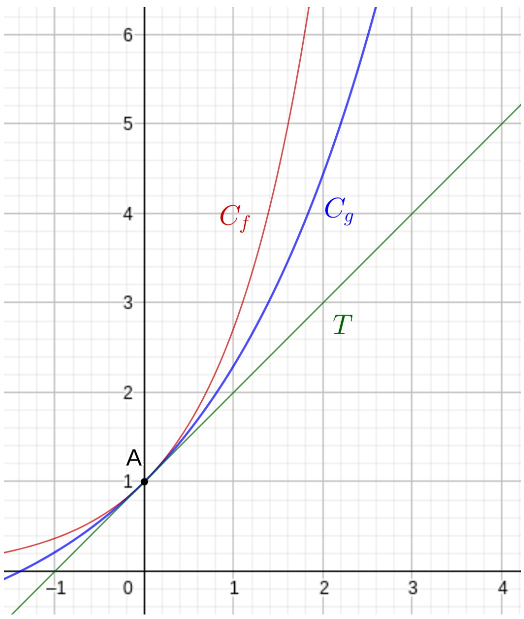
5. Pour tout réel k, le point $(1 ; 1)$ appartient à la droite T_k : en effet : $y = (1 - k)1 + k = 1$. Donc pour tout réel k, la droite T_k passe par le point $(1 ; 1)$.

Ci-contre quelques courbes et tangentes aux points d'abscisse 0 de la courbe ; on remarque les points M_k.



<u>Exercice 6</u> : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$, C_f et C_g les représentations graphiques de f et g dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Les courbes C_f et C_g ont un point commun si et seulement si l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Cette équation est équivalente à $e^x = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ équivaut à $e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$ équivaut à $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = 0$ équivaut à $e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$ équivaut à $e^{\frac{x}{2}} = 1 = e^0$ équivaut à $\frac{x}{2} = 0$ équivaut à $x = 0$ et l'ordonnée est $f(0) = e^0 = 1$.
Le point commun aux deux courbes est $A(0 ; 1)$.
Tangente en ce point : à C_f :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$;
à C_g : $y = g'(0)(x - 0) + g(0) = e^{\frac{0}{2}}(x - 0) + 2e^{\frac{0}{2}} - 1 = x + 2 - 1 = x + 1$.
Donc en ce point les courbes ont la même tangente T d'équation $y = x + 1$.



2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
a) Pour étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$, on détermine sa fonction dérivée : $h'(x) = 2\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - 1 = e^{\frac{x}{2}} - 1$.

$h'(x) > 0$ équivaut à $e^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$ équivaut à $e^{\frac{x}{2}} > 1$ équivaut à $x > 0$; donc la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$; elle admet donc un minimum atteint en $x = 0$ qui vaut $h(0) = 2 - 0 - 2 = 0$; donc la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que pour tout réel x, $h(x) \geq 0$, soit $2e^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geq 0$ soit $2e^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geq 0$ soit $g(x) \geq x + 1$.
b) On en déduit que la tangente T est toujours en-dessous de C_g.

3. a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1 = f(x) - g(x)$.
Ainsi pour tout réel x, $f(x) - g(x) \geq 0$, soit $f(x) \geq g(x)$.
b) La courbe C_f est toujours au-dessus de la courbe C_g.

Exercice 7 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}}$ et C sa représentation graphique dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Pour étudier les variations de la fonction f , on détermine sa fonction dérivée : qui est de la forme $\dfrac{1}{u}$ dont la dérivée est $\dfrac{-u'}{u^2}$; d'où $f'(x) = \dfrac{-(-3e^{-3x})}{(1+e^{-3x})^2} = \dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. On admet que pour tout réel x, $f(x) > 1$.
Un algorithme qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $f(n) > 0{,}999$:
On trouve $n = 3$, c'est-à-dire que
$f(3) = \dfrac{1}{1+e^{-3\times 3}} > 0{,}999$.

Langage naturel	Python

N ← 0
f ← 1/(1 + exp(-3*N))
Tant que f ≤ 0,999 faire
    N ← N + 1
    f ← 1/(1 + exp(-3*N))
Fin Tant que
Afficher N
	from math import *
	N = 0
	f = 1/(1 + exp(-3*N))
	while f <= 0.999:
	    N = N + 1
	    f = 1/(1 + exp(-3*N))
	print(N)

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et C sa représentation graphique dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1. Pour montrer que le point K(0 ; 0,5) est un centre de symétrie de C, on montre que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 0{,}5$:

Simplifions $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{1}{e^x}\times\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{e^x+1}$.

Ainsi, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}}{2} = \dfrac{\frac{e^x+1}{1+e^x}}{2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. Donc K est bien un centre de symétrie de C.

2. Pour étudier les variations de f , on détermine la fonction dérivée qui est de la forme $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Une équation de la tangente à C au point K est
$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{e^0}{(1+e^0)^2}(x-0) + \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

4. Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C , il faut étudier le signe de la différence entre la fonction f et l'équation de la tangente : $f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{e^x}{1+e^x} - \left(\dfrac{x+2}{4}\right) = \dfrac{4e^x-(x+2)(1+e^x)}{4(1+e^x)} = \dfrac{4e^x-x-xe^x-2-2e^x}{4(1+e^x)} = \dfrac{2e^x-xe^x-2-x}{4(1+e^x)}$; le dénominateur est strictement positif, donc il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

5. a) On a $g'(x) = 2e^x - (e^x + xe^x) - 1 = e^x - xe^x - 1$ et
$g''(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$
qui est du signe de x puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
b) Ainsi $g''(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^-$, et $g''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$; donc la fonction g' est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$; elle admet donc un minimum en $x = 0$ qui vaut $g'(0) = 0$, donc $g'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. d'où le tableau de variations de $g'(x)$ et de $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	+	↘	0	↗	+
$g(x)$		↗	0	↗	

c) On en déduit le signe de la fonction g : $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^-$, et $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$; Donc la courbe C est au-dessus de la tangente T sur $\mathbb{R}^+$ et en-dessous sur $\mathbb{R}^-$.

6. L'équation $f(x) = \frac{1}{3}$

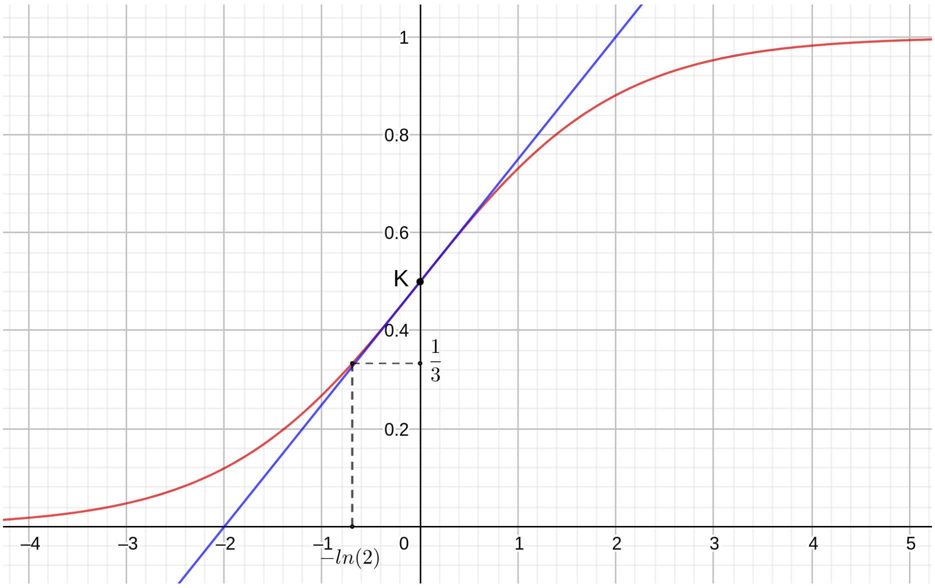
équivaut à $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{3}$

équivaut à $3e^x = 1 + e^x$

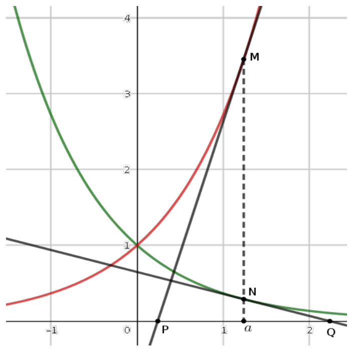
équivaut à $2e^x = 1$

équivaut à $e^x = 0{,}5$

équivaut à $x = \ln(0{,}5) = -\ln(2)$.



<u>Exercice 9 :</u> Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan. Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a. La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.



Une équation de la tangente à C_f au point $M(a\ ;\ f(a))$ est
$y = f\,'(a)(x - a) + f(a) = \mathrm{e}^a\,(x - a) + \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a$.
Cette tangente coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$, soit $\mathrm{e}^a x - a\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a = 0$,
soit $\mathrm{e}^a x = a\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^a$, soit $x = \frac{ae^a - e^a}{e^a} = a - 1$. Donc $P(a - 1\ ;\ 0)$.
Une équation de la tangente à C_g au point $N(a\ ;\ g(a))$ est
$y = g\,'(a)(x - a) + g(a) = -\mathrm{e}^{-a}\,(x - a) + \mathrm{e}^{-a} = -\mathrm{e}^{-a}x + a\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a}$.
Cette tangente coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$, soit $-\mathrm{e}^{-a}x + a\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a} = 0$,
soit $\mathrm{e}^{-a}x = a\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-a}$, soit $x = \frac{ae^{-a} + e^{-a}}{e^{-a}} = a + 1$. Donc $Q(a + 1\ ;\ 0)$.
La longueur PQ est égale à $\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{(a+1-(a-1))^2+(0-0)^2} = \sqrt{(1+1)^2} = 2$.
Donc PQ est bien égale à une constante $= 2$.

<u>Exercice 10 :</u> Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (k - x)\mathrm{e}^x$.
On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-contre quelques courbes C_k pour différentes valeurs de k.
Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k semble admettre un maximum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce maximum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe C_k.
1. Pour déterminer les coordonnées de A_k, on étudie les variations de la fonction f_k et on recherche un éventuel extremum :
$f_k\,'(x) = -1e^x + (k - x)e^x = (k - x - 1)e^x$. Cette dérivée est du signe de $k - x - 1$ puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$; $k - x - 1 = 0$ équivaut à $x = k - 1$, d'où le tableau de variations de la fonction f_k :

x	$-\infty$		$k-1$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	

2. D'après le tableau de variations, pour tout réel k, la fonction f_k admet un unique maximum, noté $y_k = e^{k-1}$ atteint en $x_k = k - 1$.
Donc $A_k\ (k - 1\ ;\ e^{k-1})$.
2. Le point A_k appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle car $e^{x_k} = e^{(k-1)} = e^{k-1} = y_k$.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. La fonction dérivée de f est $f\,'(x) = 1e^{1-x} + x(-e^{1-x}) = e^{1-x}(1-x)$ qui est du signe de $1 - x$ puisque $e^{1-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + e^{1-x} - 1$.

2. La fonction dérivée de g est $g\,'(x) = 1 - e^{1-x}$;

$1 - e^{1-x} \geq 0$ équivaut à $1 \geq e^{1-x}$ équivaut à $0 \geq 1 - x$ équivaut à $x \geq 1$. D'où le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

Les courbes C_f et C_g sont les courbes représentatives des fonctions f et g.

3. D'après les tableaux de variations, les courbes C_f et C_g se coupent au point A(1 ; 1). On vérifie que c'est le seul point d'intersection ; pour cela, on résout l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $xe^{1-x} = x + e^{1-x} - 1$ équivaut à $xe^{1-x} - e^{1-x} = x - 1$ équivaut à $(x-1)e^{1-x} = x - 1$ équivaut à $(x-1)e^{1-x} - (x-1) = 0$ équivaut à $(x-1)(e^{1-x} - 1) = 0$; un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul ; soit

$x - 1 = 0$ ou $e^{1-x} - 1 = 0$

$x = 1$ ou $e^{1-x} = 1 = e^0$

$x = 1$ ou $1 - x = 0$

$x = 1$ ou $x = 1$; donc la seule solution est $x = 1$.

4. Les tangentes aux courbes C_f et C_g en A sont-elles les mêmes ? On détermine les coefficients directeurs des tangentes ; s'ils sont égaux, c'est la même tangente :

$f\,'(1) = e^{1-1}(1-1) = 0$ et

$g\,'(1) = 1 - e^{1-1} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$;

c'est la même tangente.

Voir figure ci-contre.